ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2013

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

ЛЕГИОН ™

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2013

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

Учебно-методическое пособие

™

ЛЕГИОН

Ростов-на-Дону

2013

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — к.ф.-м.н., доцент
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель РФ

Авторский коллектив:
Иванов С. О., Ковалевская А. С., Коннова Е. Г., Кулабухов С. Ю., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты**: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 144 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0223-0

Пособие является частью **учебно-методического комплекса** для подготовки к ЕГЭ по математике и продолжением книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013» под редакцией Ф. Ф. Лысенко и С. Ю. Кулабухова.

В пособие включены тесты, составленные в соответствии со спецификацией и демонстрационным вариантом ЕГЭ-2013. Издание содержит необходимый материал и рекомендации для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике:

- **22 новых авторских учебно-тренировочных теста**, составленных по спецификации ЕГЭ-2013 с учётом опыта экзамена 2012 года и последних изменений в открытом банке заданий по математике;
- краткий математический **справочник**.

Книга позволит выпускникам и абитуриентам, не обращаясь к дополнительной литературе, получить желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи ЕГЭ и получения аттестата, до максимально возможного.

Пособие предназначено выпускникам общеобразовательных учреждений, учителям и методистам.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0223-0

Оглавление

2. Зак. № 293

От авторов

Предлагаемое пособие содержит **22 учебно-тренировочных теста,** составленных в соответствии со спецификацией ЕГЭ-2013. Каждый тест включает 14 заданий группы В с кратким ответом и 6 заданий группы С, требующих развёрнутого письменного решения.

Значительная часть заданий посвящена отработке тем и идей, содержащихся в новой спецификации и получивших свое отражение в демонстрационном варианте. При составлении задач предпочтение отдавалось темам, появление которых **наиболее вероятно на ЕГЭ-2013**.

Задания группы В составлены в соответствии **с открытым банком задач**. Из предлагаемого многообразия задач открытого банка авторы выделили набор, охватывающий все проверяемые на экзамене знания и навыки.

Варианты расположены в книге по возрастанию сложности. Первые варианты из предлагаемых двадцати двух наиболее простые и рекомендуются для начальных этапов подготовки к ЕГЭ. Последние варианты являются более сложными и рекомендуются для систематической подготовки, гарантирующей высокий результат на предстоящем экзамене.

Пособие является самодостаточным и позволяет не пользоваться дополнительным материалом, так как в него включён **краткий теоретический справочник**.

Прежде чем приступить к решению тестовых заданий, внимательно изучите **инструкцию по выполнению работы**, помещенную перед первым вариантом теста на стр. 64.

По утверждению разработчиков открытого банка задач, для получения удовлетворительной оценки на ЕГЭ в 2013 году ученику необходимо решить 5 заданий части В.

Отметим также, что новая шкала перевода набранных первичных баллов в тестовые (в 100-балльную систему) будет известна только по окончании сдачи ЕГЭ-2013.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства `http://legionr.rossite.org`.

Следите за дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства `http://legionr.ru` в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ (доступ к материалам свободный).

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013.
  Основная книга для подготовки к ЕГЭ, включающая необходимый теоретический минимум, сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ЕГЭ, а также сборник задач.

- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013.
  Пособие содержит решения всех тестовых заданий и всех задач из раздела «Задачник» книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013».

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты.

- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты.
  Книга содержит решения всех тестовых заданий пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты».

- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2013 (B1 – B6). Пособие для «чайников».
  Пособие предназначено для подготовки к выполнению заданий базового уровня сложности B1 – B6 и включает в себя описание методов решения этих заданий и тесты для самостоятельной работы.

- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2013 (B7 – B14). Пособие для «чайников».
Пособие предназначено для подготовки к выполнению заданий базового уровня сложности B7 – B14 и включает в себя описание методов решения этих заданий и тесты для самостоятельной работы.

- Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2013 (C1, C3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы.
Пособие содержит задания C1, C3 по отдельным темам, являющимся традиционными в курсе математики. По каждой теме составлено 10 вариантов, один из них приводится с решением.

- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание C5.
Пособие позволяет осуществить подготовку к решению задач с параметром, начиная с простых и заканчивая уровнем заданий C5 ЕГЭ.

- Математика. 11-й класс. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа.
Пособие содержит варианты самостоятельных и контрольных работ, а также поурочное планирование для второго полугодия 11-го класса.

- Математика. 10 – 11 классы. Карманный справочник.
Пособие содержит необходимый справочный материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике, а также к различным формам промежуточного контроля по алгебре и геометрии в 10 – 11 классах.

- Математика. 10-й класс. Промежуточная аттестация в форме ЕГЭ.
*Пособие содержит **40 вариантов итоговых работ** для учащихся 10-х классов и может быть использовано не только для промежуточной аттестации в 10-м классе, но и в процессе подготовки к ЕГЭ.*

Замечания и пожелания, касающиеся данной книги, можно передать по электронной почте legionrus@legionrus.com или по телефонам (863) 303-05-50, 248-14-03 Лысенко Фёдору Фёдоровичу и Кулабухову Сергею Юрьевичу.

Желаем вам успехов!

Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные программой 2002 года для общеобразовательных учреждений. В основу отбора материала положен курс B, по которому разрабатывались КИМы 2002–2012 годов. Однако, как при подготовке к ЕГЭ, так и при его сдаче, учащимся понадобятся сведения, которые требуют значительных усилий при их доказательстве, выводе, исследовании. Они не входят в нормативные рамки курса B, но большинство из них включено в курс углубленного изучения математики и отмечено звездочкой (*).

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями.

N — множество всех натуральных чисел.
N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.
Z — множество всех целых чисел.
Q — множество всех рациональных чисел.
R — множество всех действительных (вещественных) чисел.
R^+ — множество всех положительных действительных чисел.
$\Rightarrow$ — следует.
$\Leftrightarrow$ — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.
$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.
$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.
$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.
const — постоянная величина.
$\in$ — принадлежит, содержится; например:
$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.
$n \,\vdots\, m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m.

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R, n \in N$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}};$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0;$$

$$0^0 \text{ не определено};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geqslant 0 \text{ при } n \text{ чётном};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечётном}.$$

2. Пусть $a \in R^+$; $m \in Z, n \in N, n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N, m, n > 1$; $a, b \in R^+$. Тогда

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q$, $a, b \in R^+$. Тогда

$$a^p a^q = a^{p+q}; \qquad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведенные правила верны и для p, $q \in R$.

Формулы сокращенного умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$	$26^2 = 676$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$	$27^2 = 729$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$	$28^2 = 784$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$	$29^2 = 841$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$	$30^2 = 900$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчёта — точки O.

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0; \quad {}^*|x^n| = |x|^n, n \in Z, \left[\begin{array}{l} x \neq 0, \\ n > 0. \end{array}\right.$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d, a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q, b_1 \neq 0, q \neq 0; \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \frac{b_1}{1-q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени y, в которую нужно возвести a, чтобы получить число x: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0, a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0;$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0;$$
$$\log_a x^k = k \log_a |x|, k \text{ — чётное целое.}$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x \log_b y = \log_a y \log_b x$.

4. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, тогда

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, p \neq 0;$$
$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_{|a|} b, k \neq 0, k \text{ — чётное целое.}$$

5*. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Теория вероятностей

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Противоположные события

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1; \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

§ 7. Тригонометрия

Радианное измерение углов

Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0,017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$^{*}\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \qquad ^{*}\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \qquad ^{*}\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, то

$$^*\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad ^*\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2\cdot\sin\frac{x\pm y}{2}\cdot\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$^*\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^*\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^*\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y};$$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big);$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$y \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$D(\arccos x) = [-1; 1]$; $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

$D(\operatorname{arctg} x) = R$; $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$D(\operatorname{arcctg} x) = R$; $E(\operatorname{arcctg} x) = \left(0; \pi\right)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $x \in [-1; 1]$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\sin(\arcsin x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x_0$, где $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_0 = \sin x$;

$\cos(\arccos x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arccos(\cos x) = x_0$, где $x_0 \in [0; \pi]$ и $\cos x_0 = \cos x$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x_0$, где $x_0 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0$, где $x_0 \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x$.

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a;\quad |a| \leqslant 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = 0;\quad x = \pi k; k \in Z;$

$\sin x = 1;\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = a; |a| \leqslant 1;\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z;$

$\cos x = 1;\quad x = 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi k; k \in Z;$

$\operatorname{tg} x = a;\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in Z;$

$\operatorname{ctg} x = a;\quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; n \in Z.$

§ 8. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in N_0$) называется всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \textbf{(Теорема Виета)}.$$

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$f(x) = ax^2 + 2kx + c$, то $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

то $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать большой буквой D. Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

***Теорема Безу и схема Горнера**

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдется такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0)\, q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots, \quad b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \ldots$$
$$\ldots, \quad b_1 = x_0 b_2 + a_2, \quad b_0 = x_0 b_1 + a_1, \quad f(x_0) = x_0 b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу).}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Приведём еще одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то

1) $a_n \vdots\, q$;

2) $a_0 \vdots\, p$.

Следствие. Пусть $f(x) = x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0.

Эти теоремы будут очень полезными при выполнении некоторых заданий части В и части С, их использование существенно экономит время решения.

Пример 1. Найдите целые корни уравнения $x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ±1; ±2. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	−3	−2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
−1	1	3	2	0		корень
−1	1	2	0			корень (кратности 2)

$x^4+3x^3+x^2-3x-2 = (x-1)(x+1)^2(x+2)$.

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; −1; −2, причём −1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решите уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 6: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{4}$	не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0$.

$x_1 = -\frac{1}{3}$; $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 2: ± 1; ± 2.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x^2+x+1=0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 9. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что в соответствии с [1], *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x, соединенных знаком равенства:

$$f(x)=g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f)\cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a)=g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения, в которых требуется принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными,* если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B, если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным,* если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Все сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть, если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$$a \leqslant \frac{a^2+1}{2}; \qquad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \qquad \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ при } a > 0; \qquad a + \frac{1}{a} \leqslant -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ во втором.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства:

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ h(x, y) = t(x, y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0), являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 10. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, $\neq$.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.

2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида $\left[\begin{array}{l} f(x)\geqslant g(x), \\ h(x)< u(x). \end{array}\right.$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Поскольку $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) > 0,$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{array}\right.$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство $\frac{x^2-7x+10}{x-3} + \frac{6x-9}{x+1} \leqslant 1.$

Решение. $\frac{x^2-7x+10}{x-3} + \frac{6x-9}{x+1} - 1 \leqslant 0,$

$$\frac{(x^2-7x+10)(x+1)+(6x-9)(x-3)-(x-3)\cdot(x+1)}{(x-3)(x+1)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{x^3 - x^2 - 22x + 40}{(x-3)\cdot(x+1)} \leqslant 0$. Числитель последней дроби разложим на множители. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 22x + 40$; разделив данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x - 2$, получаем $x^3 - x^2 - 22x + 40 = (x-2)\cdot(x^2 + x - 20) = (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \leqslant 0, \\ (x-3)\cdot(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 1) и выкалывая точки $x = -1$, $x = 3$, получаем ответ

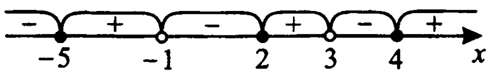


Рис. 1.

$x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 2] \cup (3; 4]$.

§ 11. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. В данном случае $D(y) = [0;\ \pi]$, так как данной фразой функция $y = \sin x$ определена лишь на отрезке $[0;\ \pi]$. Если же рассматривается функция $y = \sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y) = R$. В этом случае говорят также, что функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается функция $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок относительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x < 1$, так как при $x < 1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x = \pm 2$, так как при $x = \pm 2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции $D(y) = [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$D\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$ $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;\ +\infty).$

$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R.$ $D\left(\log_a x\right)=(0;\ +\infty).$

$D(\sin x)=D(\cos x)=R.$ $D\left(a^x\right)=R.$

$^*D(\arcsin x)=D(\arccos x)=[-1;\ 1].$

$^*D(\operatorname{arctg} x)=D(\operatorname{arcctg} x)=R.$

$D(\operatorname{tg} x)=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3}{2}\pi+2\pi k\right),\ k\in Z.$

Или $D(\operatorname{tg} x):\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$

$D(\operatorname{ctg} x)=(2\pi k;\pi+2\pi k)\cup(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k),\quad k\in Z.$

Или $D(\operatorname{ctg} x):\ x\neq\pi k,\quad k\in Z.$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ функции $y=f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдется такое число x_0, что $f(x_0)=y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$E\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$ $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;\ +\infty).$

$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R.$ $E\left(a^x\right)=(0;\ +\infty).$

$E\left(\log_a x\right)=R.$ $E(\sin x)=E(\cos x)=[-1;\ 1].$

$^*E(\arcsin x)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].$ $^*E(\arccos x)=[0;\ \pi].$

$E(\operatorname{tg} x)=E(\operatorname{ctg} x)=R.$ $^*E(\operatorname{arctg} x)=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$

$^*E(\operatorname{arcctg} x)=(0;\ \pi).$

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведем одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t=t(x)$.

Тогда $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2\cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1;\ 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1;\ 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1;\ 1]$ является линейной и возрастающей, поэтому $E(y) = [2(-1) + 1;\ 2 \cdot 1 + 1] = [-1;\ 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x, достаточно близких к a, величина $\dfrac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\dfrac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x, стремящемся к a: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\dfrac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида $\dfrac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, причём при всех x, достаточно близких к a, функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде $\dfrac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись $\dfrac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ +0 \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \qquad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ -\infty \text{ при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 2 – 7 изображены графики основных элементарных функций.

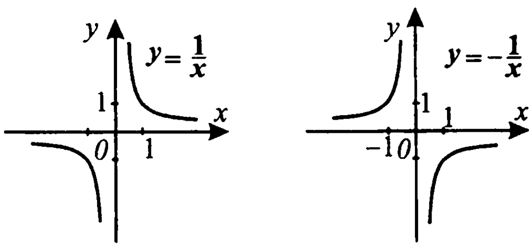


Рис. 2.

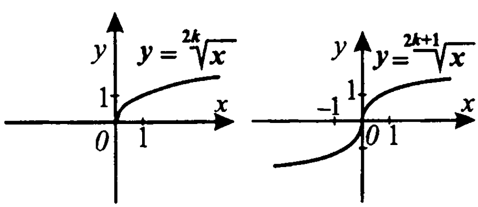


Рис. 3.

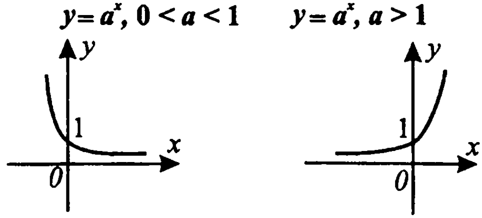


Рис. 4.

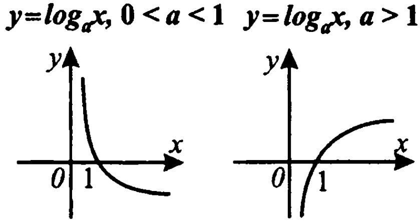


Рис. 5.

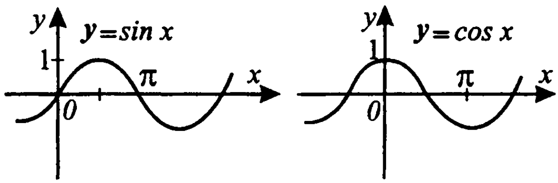


Рис. 6.

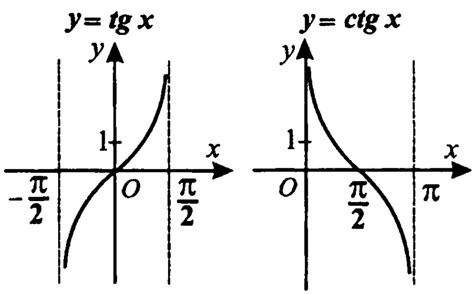


Рис. 7.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 8).

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 9).

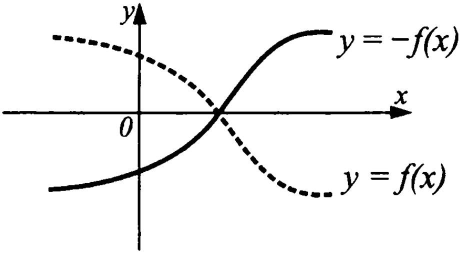


Рис. 8.

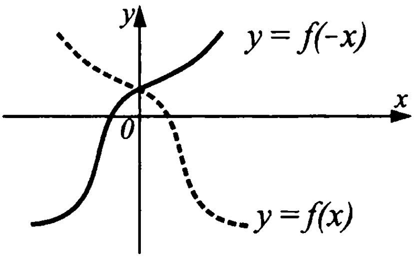


Рис. 9.

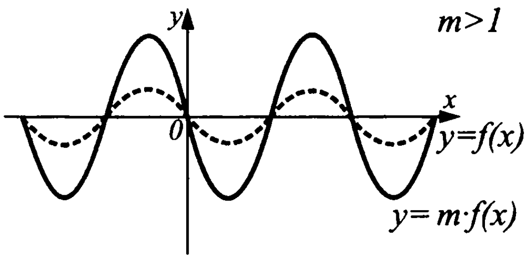


Рис. 10.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 10).

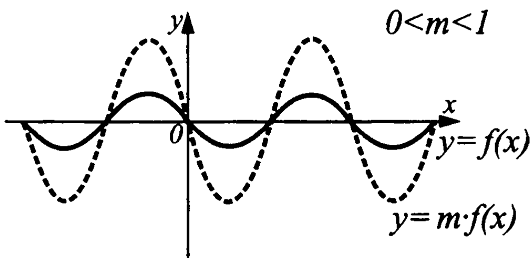


Рис. 11.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 11).

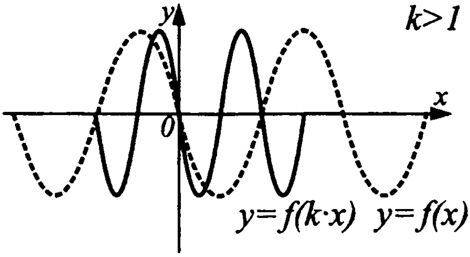


Рис. 12.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 12).

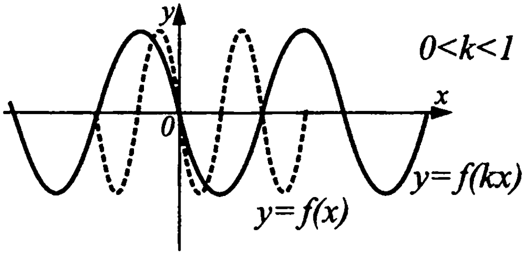


Рис. 13.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 13).

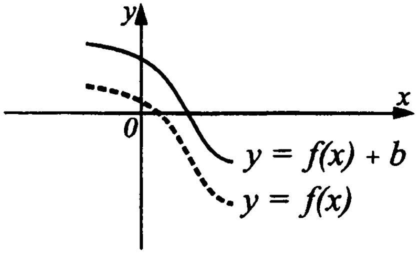


Рис. 14.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 14).

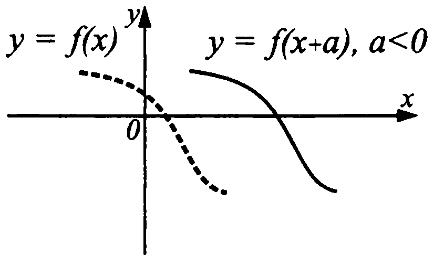


Рис. 15.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 15).

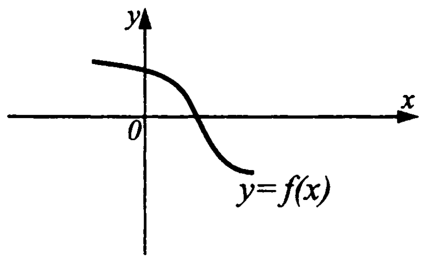


Рис. 16.

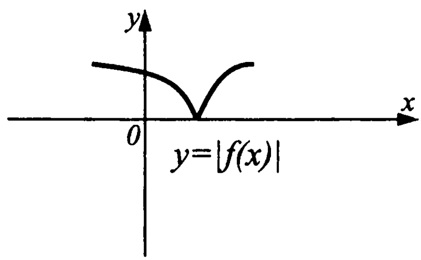


Рис. 17.

График функции $y = |f(x)|$ (рис. 17) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

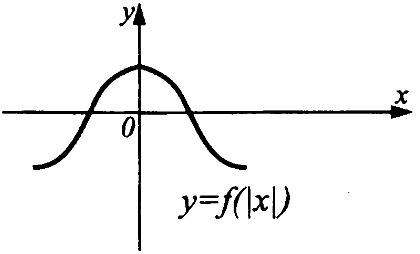


Рис. 18.

График функции $y = f(|x|)$ (рис. 18) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(c)' = 0$ (c — const); $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (α — const);

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

3. Зак № 293

$$*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad *(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$*(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\quad *(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u',\ c \text{ — const};\qquad (u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$y = f\big(g(x)\big),\ y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x),\ \text{где } u = g(x).$$

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t.

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает)* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$, причём равенство нулю невозможно на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно, если на каком-то промежутке $f'(x) \geqslant 0$ $\big(f'(x) \leqslant 0\big)$, причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «−» (с «−» на «+»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f\big(g(x)\big)$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «+» означает возрастание функции, а «−» — убывание.

$f(x)$	+	+	−	−
$g(x)$	+	−	+	−
$f\big(g(x)\big)$	+	−	−	+

Наибольшее, наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется *наибольшим (наименьшим)* значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство
$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \big(f(x_0) \leqslant f(x)\big).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

4. Зак. № 293

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$ на промежутке A.

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И обратно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c (c — const) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведем таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$F(x^\alpha) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; (\alpha \neq -1)$. $\quad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln|x| + c$.

$F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x + c, \; x > 0$. $\quad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c, \; x < 0$.

$F(\sin x) = -\cos x + c$. $\quad F(\cos x) = \sin x + c$.

$F\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c$. $\quad F\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c$.

$F(a^x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$. $\quad F(e^x) = e^x + c$.

$^*F\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + c$. $\quad ^*F\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c$.

Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$ и вычисляется по формуле

$\int f(x)dx = F(x) + c$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Кроме того, при нахождении интегралов можно пользоваться формулами:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k \in R$.

Определённый интеграл

Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Для приведённой формулы используется сокращённая запись:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Справедливы формулы: $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где $k \in R$;

$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 19) можно вычислить по формуле $S = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.

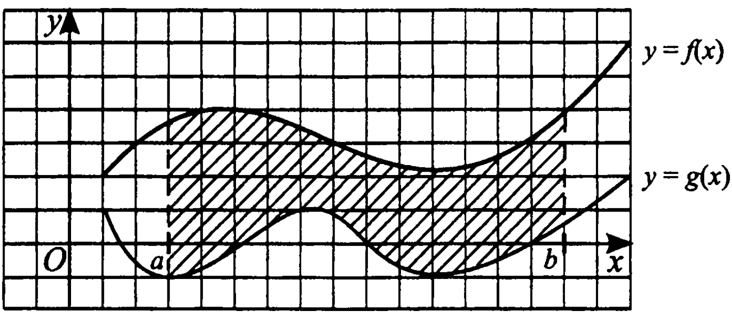


Рис. 19.

§ 12. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.
4. Сумма внешних углов n-угольника равна $360°$.
5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен $90°$.
7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.
4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, — то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.
2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.
4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то
   1) перпендикуляр короче наклонных;
   2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведенная к стороне c, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.

2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

1. Диагонали ромба перпендикулярны.

2. Диагонали ромба делят его углы пополам.

3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180°}{n};\quad a_n = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n} \cdot r_n;\quad r_n = R_n \cdot \cos\frac{180°}{n}.$$

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой центром окружности.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R $(r < R)$ с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними касательными. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

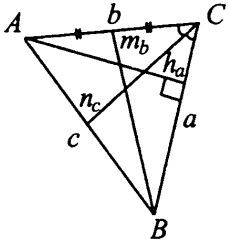
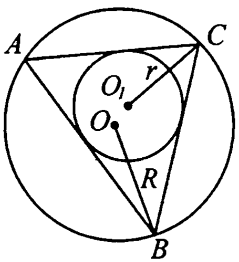
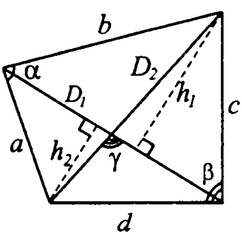
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

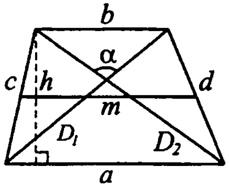
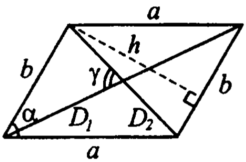
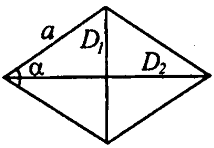
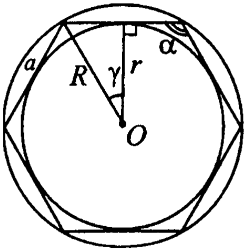
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

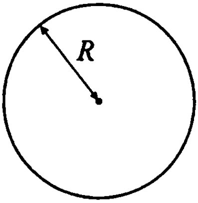
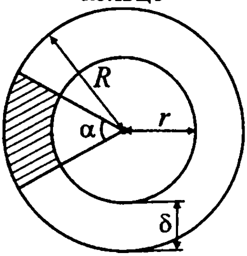
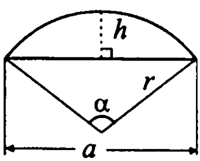
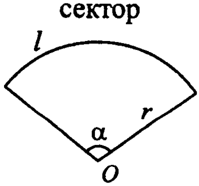
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник   	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \dfrac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \dfrac{2S}{b}$ $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_a b_c}$ $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ $S = r^2\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \dfrac{4}{3}\sqrt{\mu}\times$ $\times\sqrt{(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник  	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \dfrac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \dfrac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$ $S = \dfrac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2\sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг  	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо  	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца $S = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент  	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a$ $S = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \frac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор  	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \frac{lr}{2}$ $S = \frac{\pi r^2\alpha}{360}$

§ 13. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.

2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b, то прямые a и b параллельны.

3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.

4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, не параллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB, а N — середина CD, то $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. **Свойства скалярного произведения векторов:**

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет

вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой,** проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задается системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями.** Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ $(a, b, c \neq 0)$, то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости.** Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует бóльшая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания a, а A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD.

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания a, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.

5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = 3r; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. **Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда**

а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах DA, DB и DC соответственно треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём V тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние c между ними и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

11. Объём V тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a, то есть $V = \frac{2}{3}\frac{PQ\sin\varphi}{a}$.

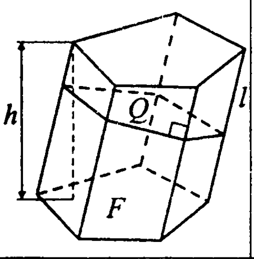
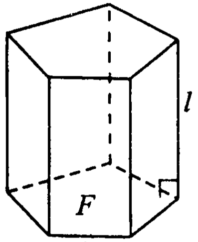
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

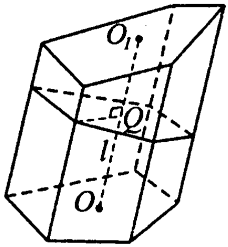
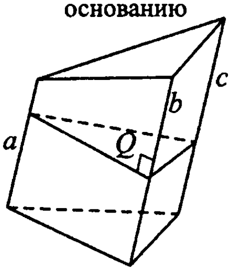
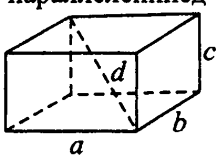
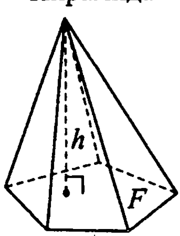
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

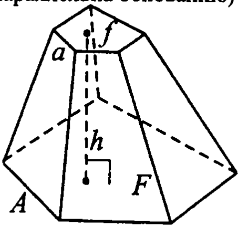
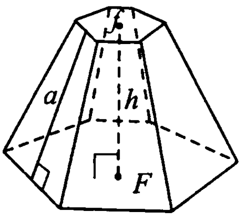
Основные формулы

Далее V — объём тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности.

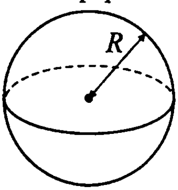
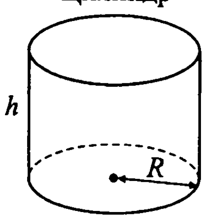
Многогранники

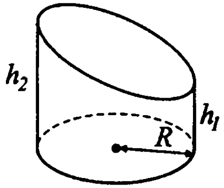
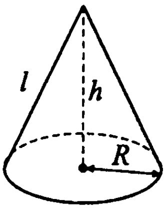
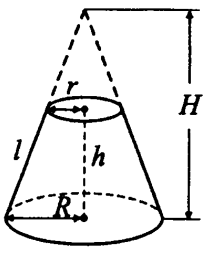
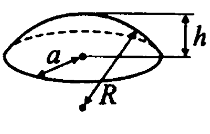
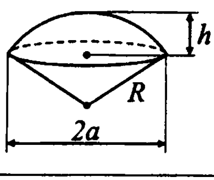
Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма 	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.	$V = Fh = Ql$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$
Прямая призма 	F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.	$V = Fl$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма, усечённая непараллельно основанию 	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.	$V = Ql$
Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.	$V = abc$ $S = 2(ab+bc+ac)$
Пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида $S_б = \frac{1}{2}Pa$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Усечённая пирамида **(плоскость сечения параллельна основанию)**  	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$
Правильная усечённая пирамида  	F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_б = \frac{P + p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
Сфера  	R — радиус.	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
Цилиндр  	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$ $S_б = 2\pi Rh$ $S = 2\pi R(h + R)$

Цилиндр, усечённый непараллельно основанию 	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_б = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right)$
Конус 	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_б = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Усечённый конус 	R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi\left(R^2 + r^2 + l(R + r)\right)$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_б = 2\pi Rh$ $S_б = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

Глава I. Учебно-тренировочные тесты

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1 – B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1 – C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценке работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант №1

Часть 1

B1. Поезд Ростов-Москва отправляется в 13:40, а прибывает в 7:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

B2. На рисунке 1 показана зависимость напряжения в электрической цепи фонарика от времени его работы. По горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, по вертикальной — напряжение в вольтах. Найдите по рисунку, какое напряжение (в вольтах) будет в электрической цепи через 2 часа после начала работы фонарика.

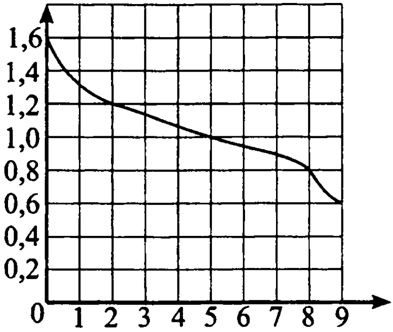


Рис. 1.

B3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 2). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

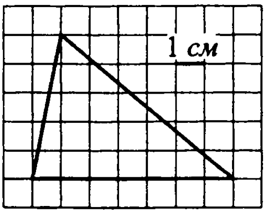


Рис. 2.

B4. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

Автобус	От дома до автобусной станции 10 минут	Автобус в пути 2 часа 15 минут	От остановки автобуса до дачи пешком 20 минут
Электричка	От дома до станции железной дороги 30 минут	Электричка в пути 1 час	От станции до дачи пешком 45 минут
Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси 15 минут	Маршрутное такси в пути 1 час 50 минут	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 25 минут

B5. Найдите корень уравнения $\frac{3}{7}x = -6\frac{3}{7}$.

B6. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 12 (см. рис. 3).

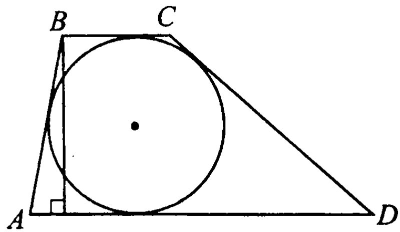


Рис. 3.

B7. Найдите значение выражения $5^9 \cdot 6^{12} : 30^9$.

B8. На рисунке 4 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней.

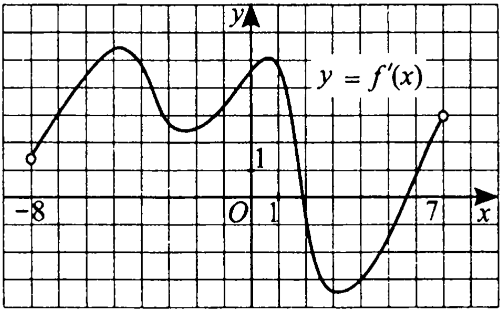


Рис. 4.

B9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $BB_1 = 3$, $C_1D_1 = 12$, $BC = 24$ (см. рис. 5). Найдите длину диагонали DB_1.

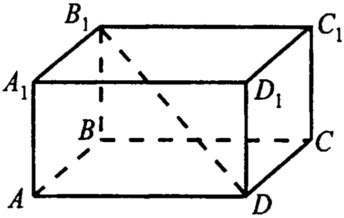


Рис. 5

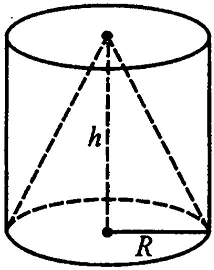


Рис. 6

B10. В вагоне электрички из 20 пассажиров 3 — безбилетные. Контролёр проверил билет у одного из пассажиров наудачу. Найдите вероятность того, что этот пассажир не имеет билета.

B11. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 6). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 15.

B12. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию p (единиц в месяц) от её цены k (тыс. руб.) задаётся формулой $p = 105 - 7k$. Определите максимальный уровень цены k (тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $q = p \cdot k$ составит не менее 182 тыс. рублей.

B13. Из двух городов, расстояние межу которыми 22,5 км, одновременно навстречу друг другу вышли 2 человека со скоростями 5 и 4 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

B14. Найдите точку минимума функции $y = 10x^3 + 15x^2 - 180x + 17$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $2\log_2(\cos 2x - \sin x + 2\sqrt{2}) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 16$, $CC_1 = 9$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x(x+2) > 2, \\ (x-1)\log_5 2 + \log_5(2^{x+1} + 1) < \log_5(7 \cdot 2^x + 12). \end{cases}$$

C4. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 2 : 3$. Найдите BC.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x-6| + \sqrt{x} = 4$ имеет более двух корней.

C6. Пусть c и d — некоторые натуральные числа, $n = cd$. Какое наибольшее значение может принимать НОД(c, d), если

а) $n = 600$;

б) $n = 12!$ (где $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 12$);

в) $n \leqslant 500$?

Вариант №2

Часть 1

B1. В доме, в котором живёт Петя, 7 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 5 квартир. Петя живёт в квартире № 109. В каком подъезде живёт Петя?

B2. На рисунке 7 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 мая 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барелля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов была наименьшей.

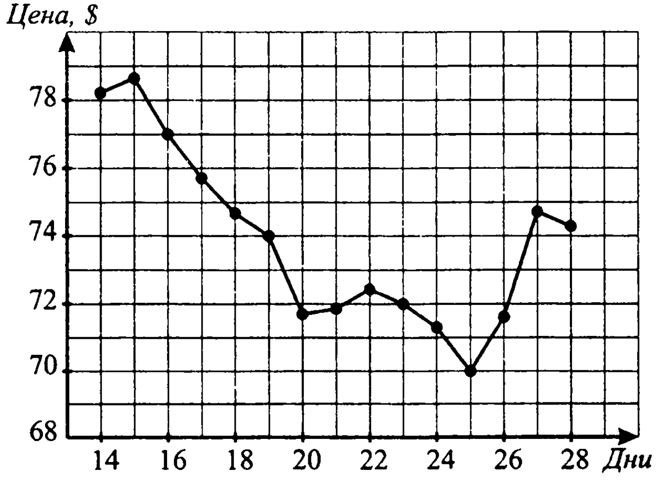


Рис. 7.

B3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 8). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

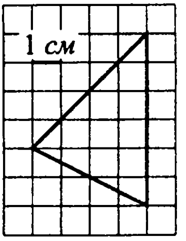


Рис. 8.

B4. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

Автобус	От дома до автобусной станции 5 минут	Автобус в пути 3 часа 10 минут	От остановки автобуса до дачи пешком 15 минут
Электричка	От дома до станции железной дороги 20 минут	Электричка в пути 2 часа 5 минут	От станции до дачи пешком 20 минут
Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси 15 минут	Маршрутное такси в пути 2 часа 30 минут	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 15 минут

B5. Решите уравнение $\frac{1-2x}{x+13} = -3$.

B6. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 9 и $3\sqrt{7}$ (см. рис. 9).

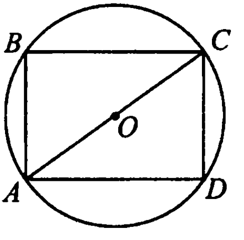


Рис. 9.

B7. Упростите выражение $\frac{b^{4,44}}{b^{3,11} \cdot b^{3,33}}$ и найдите его значение при $b = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

B8. На рисунке 10 изображены график функции $f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f(x)$ в точке x_0.

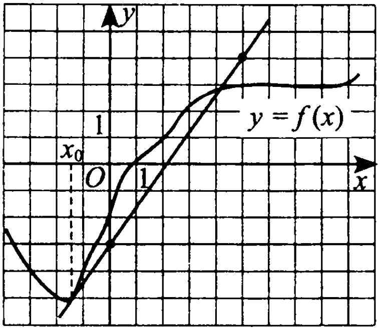


Рис. 10.

B9. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 11. Все двугранные углы многогранника прямые.

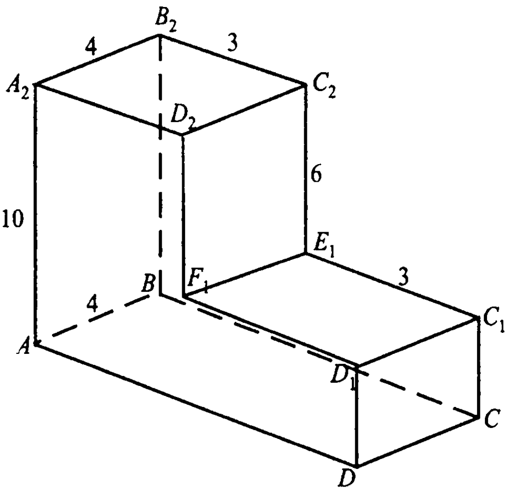


Рис. 11

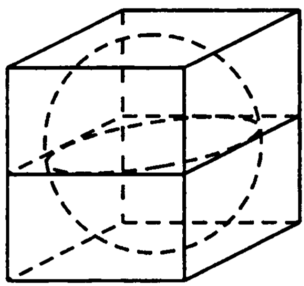


Рис. 12

B10. У Петра очень много тетрадей: часть из них в линию, а остальные — в клеточку. При этом из 15 тетрадей в среднем 9 в клеточку. Найдите вероятность того, что наугад взятая тетрадь — в линию.

B11. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2,5 (см. рис. 12). Найдите его объём.

B12. При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 11,4 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса и его длина (в метрах) будет меняться по закону $l(t°) = l_0(1+\alpha t°)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,°C^{-1}$ —

коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

B13. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо придорожного семафора за 24 секунды. Найдите длину поезда (в метрах).

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 25}$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\log_3\left(\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{5}{12}\right) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $CC_1 = 9$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{2+\sqrt{x-1}} + 3\cdot 2^{2+\sqrt{x-1}} - 16 \leqslant 15\cdot 4^{\sqrt{x-1}} + 2^{3+\sqrt{x-1}} + 5\cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}, \\ \lg\left(10^{\lg(x^2+21)}\right) > 1 + \lg x. \end{cases}$$

C4. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 40$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 3 : 5$. Найдите BC.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x+6| + \sqrt{-x} = 5$ имеет ровно два корня.

C6. Пусть c и d — некоторые натуральные числа, $n = cd$. Какое наибольшее значение может принимать НОД(c, d), если

а) $n = 800$;

б) $n = 10!$ (где $10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 10$);

в) $n \leqslant 1000$?

Вариант №3

Часть 1

B1. Круассан стоит 6 рублей 80 копеек. Какое наибольшее число круассанов можно купить на 50 рублей?

B2. На рисунке 13 жирными точками показана цена меди на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 7 по 20 августа 2008 года.

По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны меди в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену меди на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

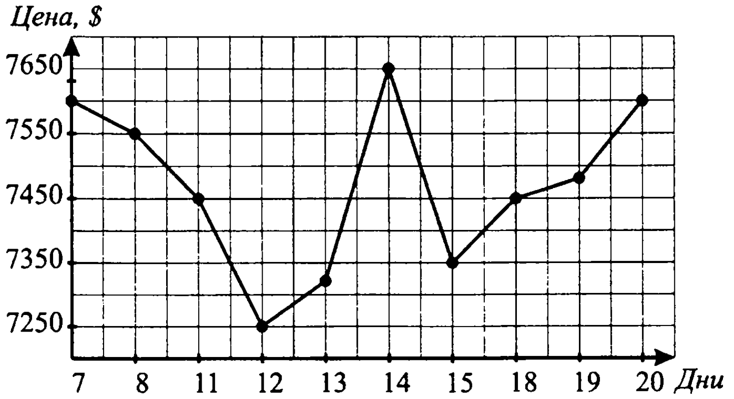


Рис. 13.

B3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 14). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

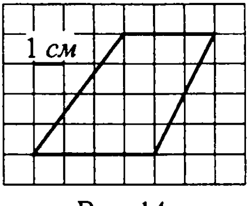


Рис. 14

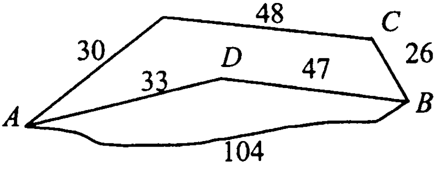


Рис. 15

B4. Из пункта A в пункт B ведут три дороги (см. рис. 15, расстояния указаны в километрах). Через пункт C едет автобус со средней скоростью 65 км/ч, через пункт D едет грузовик со средней скоростью 60 км/ч, и по третьей дороге без промежуточных пунктов едет легковой автомобиль со средней скоростью 80 км/ч. Все три автомашины выехали из пункта A одновременно. Найдите время в пути (в часах) автомашины, пришедшей позже всех.

B5. Найдите корень уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наименьший из них.

B6. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 35° и 47° (см. рис. 16). Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

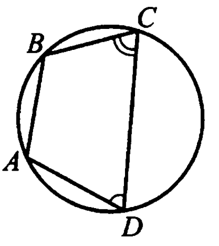


Рис. 16.

B7. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt[11]{5 \cdot a^7})^{33}}{a^{21}}$, если $a \neq 0$.

B8. На рисунке 17 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

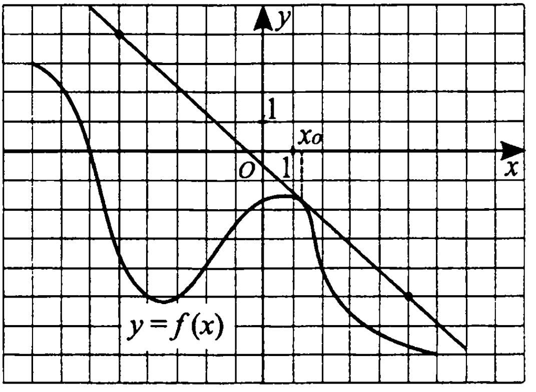


Рис. 17.

B9. Найдите расстояние между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $C_1D_1 = 5$, $AD = 2$, $BB_1 = 14$.

B10. В одном из магазинов в среднем из каждых 50 ноутбуков 19 бракованных. Какова вероятность того, что Владимир, купивший ноутбук наугад, приобрёл бракованный товар?

B11. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 18), радиус основания которого равен 5. Высота цилиндра равна 7. Найдите объём параллелепипеда.

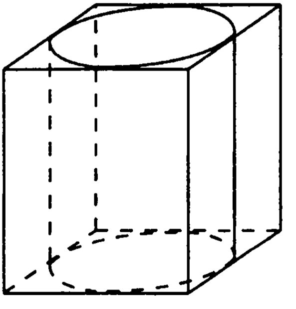


Рис. 18.

B12. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить пароварку. Определите (в Омах) наименьшее возможное сопротивление пароварки, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее 40 Ом.

B13. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч, а через час — ещё один со скоростью 30 км/ч. Найдите расстояние от A до B, если велосипедисты приехали в пункт B в одно и то же время. Ответ дайте в км.

B14. Найдите точку минимума функции $y = (x-4)^2(x+7) - 6$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2. Диаметр и хорда AB основания конуса равны соответственно 24 и 16, а высота конуса равна $\sqrt{125}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения конуса, проходящей через вершину конуса и хорду AB.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{9^x - 1}{3^x - 1} \geqslant 3, \\ \log_{|x-2|}(x^2 - 1) \leqslant 2. \end{cases}$

C4. В окружность радиуса $\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$ax - 10a = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x+2|}{x+2} + \sqrt{64 - x^2}$ имеет не менее двух корней.

C6. Через $n!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

а) Вычислите $\dfrac{2!}{1!} + \dfrac{3!}{2!} + \dfrac{4!}{3!} + \ldots + \dfrac{39!}{38!}$.

б) Найдите наибольший простой делитель числа 39!

в) На доске записали представление числа 39! в десятичной системе счисления, а затем одну цифру стёрли. Получилась запись 20 397 882 081 197 443 358 640 281 739 902 897 3$\boxed{}$6 800 000 000 (на месте стёртой цифры стоит прямоугольник). Найдите стёртую цифру.

г) Найдите, на сколько нулей оканчивается десятичная запись числа 54!

Вариант №4

Часть 1

B1. Буханка хлеба стоит 14 рублей 50 копеек. Какое наибольшее число буханок можно купить на 100 рублей?

B2. На рисунке 19 жирными точками показана цена алюминия на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 17 марта 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны алюминия в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену алюминия на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

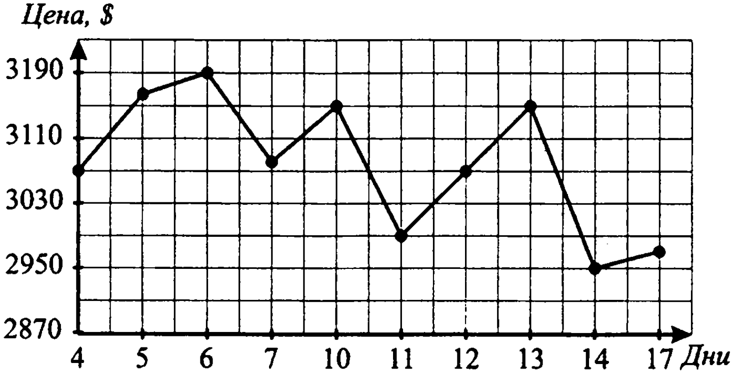


Рис. 19.

B3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 20). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

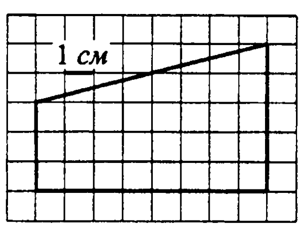


Рис. 20.

B4. Для изготовления книжных витрин требуется заказать 10 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 2,5 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку краёв. Сколько рублей стоит самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (рублей за 1 м^2)	Резка и шлифовка (рублей за одно стекло)
А	220	185
Б	240	125
В	260	120

B5. Решите уравнение $2x^2 - 9x - 35 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите их сумму.

B6. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 132, две его стороны (в последовательном порядке) равны 15 и 21 (см. рис. 21). Найдите бо́льшую из оставшихся сторон.

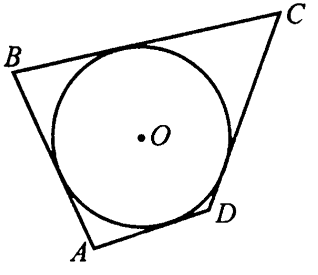


Рис. 21

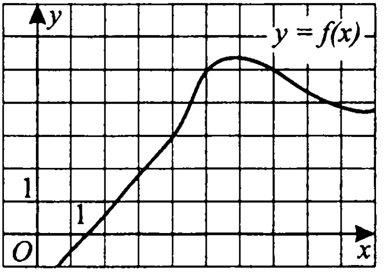


Рис. 22

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 \sqrt[5]{35}}{\log_7 35}$.

B8. На рисунке 22 изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите $f'(5)$.

B9. Найдите квадрат расстояния между вершинами D_1 и B прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 7$, $AD = 8$, $AA_1 = 6$.

B10. Мама сказала Ване купить 1 упаковку мороженого, но забыла уточнить — сливочного или пломбира. В магазине с системой самообслуживания стояло 9 упаковок пломбира и 11 — сливочного мороженого. Ваня выбрал 1 упаковку наудачу. Какова вероятность того, что он купил сливочное мороженое?

B11. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 3. Объём параллелепипеда равен 72 (см. рис. 23). Найдите высоту цилиндра.

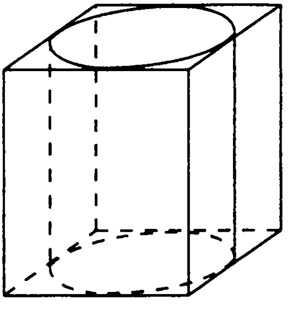


Рис. 23.

B12. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 28$ км/ч, выезжает за его пределы и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 32$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$. Найдите наибольший промежуток времени (в минутах), в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор обеспечивает покрытие на расстоянии не большем, чем 8 км от города.

B13. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 315 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите точку максимума функции $y = (x-3)^2(x-5)+7$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $2^{\cos^2 x + \operatorname{ctg} x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-\cos 2x}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2. Диаметр и хорда AB основания конуса равны соответственно 26 и 24. Тангенс угла между образующей и основанием конуса равен 8. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения конуса, проходящей через вершину конуса и хорду AB.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^x - 29 \leqslant \dfrac{28}{1-5^x}, \\ \log_{|x-3|}(3-x) \leqslant 2. \end{cases}$

C4. В окружность радиуса $\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 1 и 4. Найдите боковую сторону трапеции.

C5. Найти все значения a, при которых система $\begin{cases} \dfrac{|x-5|}{5-x} + \dfrac{5}{x} = 2 + y, \\ y + 4 + 2a = ax \end{cases}$

имеет ровно 2 корня.

C6. Через $n!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

а) Вычислите $\frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \ldots + \frac{36!}{35!}$.

б) Найдите наибольший простой делитель числа 36!

в) На доске записали представление числа 36! в десятичной системе счисления, а затем одну цифру стёрли. Получилась запись 371 993 326 789 901 217 467 999 448 150 8$\square$5 200 000 000 (на месте стёртой цифры стоит прямоугольник). Найдите стёртую цифру.

г) Найдите, на сколько нулей оканчивается десятичная запись числа 57!

Вариант №5

Часть 1

B1. В магазине проходит акция: четыре лимона по цене трёх. Какое наибольшее число лимонов можно получить за 100 рублей, если один лимон стоит 7 рублей?

B2. На графике (см. рис. 24) показано изменение температуры воздуха в течение трёх суток, начиная с 0 часов 14 января (на оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры воздуха в градусах Цельсия). Определите по графику наименьшую температуру за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

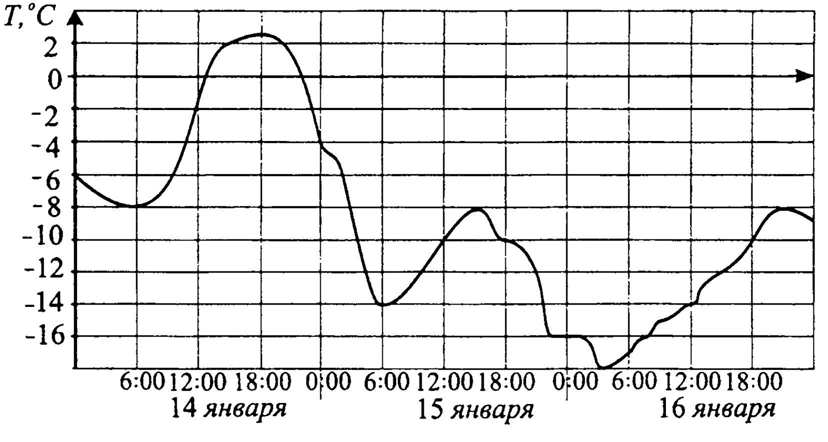


Рис. 24.

B3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён параллелограмм (см. рис. 25). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

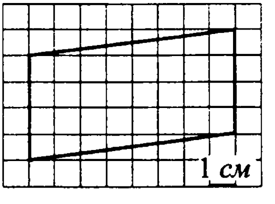


Рис. 25.

B4. Семья из четырёх человек едет из одного города в другой. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 830 руб. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 1600 км, а цена бензина составляет 21,3 рубля за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?

B5. Найдите корень уравнения $2^{x+3} = 4^{x-1}$.

B6. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом C $\sin A = 0{,}28$. Найдите $\cos B$.

B7. Найдите значение выражения $\frac{\ln 42}{\ln \sqrt[3]{42}}$.

B8. На рисунке 26 изображён график производной функции f. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1$ или совпадает с ней.

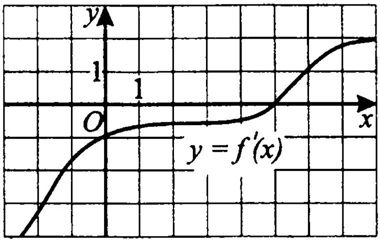


Рис. 26.

B9. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_1 многогранника, изображённого на рисунке 27. Все двугранные углы многогранника прямые.

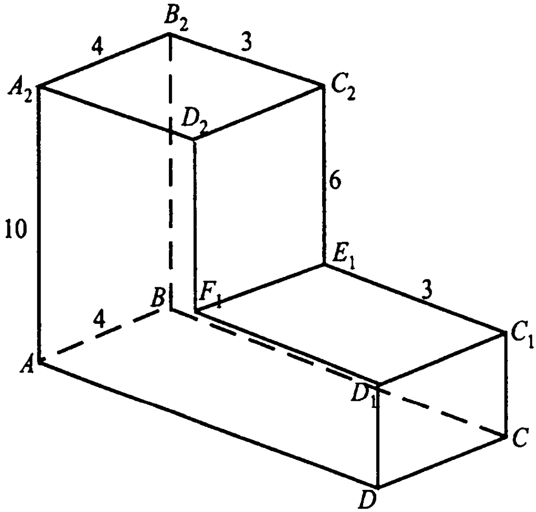


Рис. 27.

B10. На остановке стояло 16 автобусов и 9 троллейбусов. Какова вероятность того, что Оля, выбравшая транспорт наугад, села в автобус?

B11. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 28 (все двугранные углы многогранника прямые).

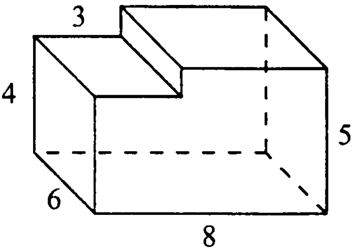


Рис. 28.

B12. Расстояние (в километрах) от наблюдателя, находящегося на высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров? Ответ выразите в километрах.

B13. Алексей, Виктор, Демьян и Егор учредили компанию с уставным капиталом 800 000 рублей, Егор внёс 160 000 рублей, Алексей — 30% уставного капитала, Виктор — $\frac{1}{8}$ уставного капитала, а оставшуюся сумму внёс Демьян. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Какая сумма от 1 200 000 рублей прибыли причитается Демьяну? Ответ дайте в рублях.

B14. Найдите точку минимума функции $y = (x-6)^2(x+4) - 7$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $2\sin 2x + 3\cos^2 x \operatorname{ctg} x = (1 - 2\cos x)\operatorname{ctg} x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2. На ребре CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P — середина этого ребра. Найдите синус угла между прямой C_1P и плоскостью AA_1C.

C3. Решите неравенство $\log_9^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$.

C4. В параллелограмме $AMPK$ биссектрисы углов при стороне AM делят сторону KP точками T и F так, что $PF : FT = 3 : 5$. Найдите PK, если $AK = 24$.

C5. При каких значениях параметра a уравнение

$(x-a)^2 + \ln \frac{a + \sqrt{a^2+2}}{2e} - \ln x = 0$ имеет единственное решение?

C6. Каждое из чисел 5, 6, ..., 13 умножили на каждое из чисел 11, 12, ..., 20 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом поставили знак плюс или минус, после чего все 90 полученных результатов сложили.

а) Какую наибольшую по модулю сумму можно получить в итоге?

б) Можно ли в итоге получить 0?

в) Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

Вариант №6

Часть 1

B1. Дипломы на конкурсе школьной самодеятельности получили 27 учеников, что составило 9% от числа учащихся. Сколько всего человек обучается в этой школе?

B2. На графике (см. рис. 29) показано изменение температуры воздуха в течение трёх суток, начиная с 0 часов 14 января (на оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры воздуха в градусах Цельсия). Определите по графику, до какой наименьшей температуры охладился воздух 15 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.

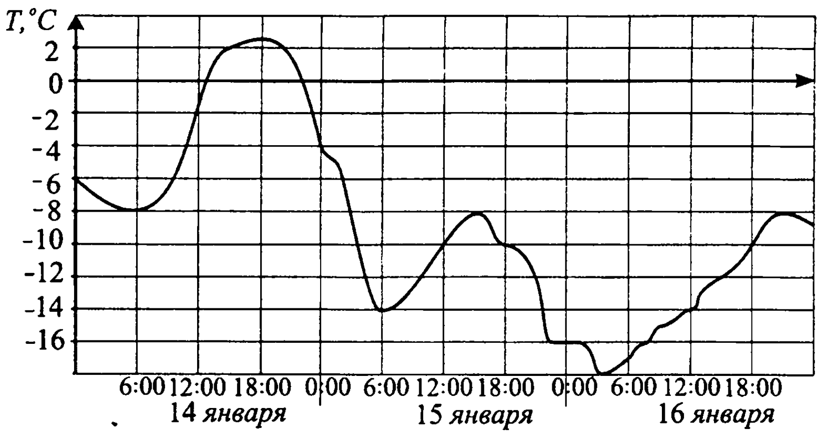


Рис. 29.

B3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 30). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

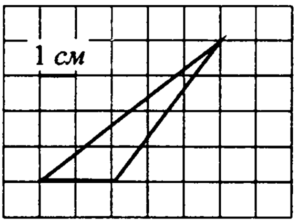


Рис. 30.

B4. Для перевозки 10 т груза на 170 км можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Каждая компания предлагает необходимое количество автомобилей одной грузоподъёмности. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвый способ перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки (руб. за 10 км)	Грузоподъёмность автомобиля (т)
А	70	2,4
Б	100	3
В	120	4

B5. Найдите корень уравнения $2^{2x-4} = 16$.

B6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle B$.

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 37°}{\sin 53°}$.

B8. На рисунке 31 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1; 5)$.

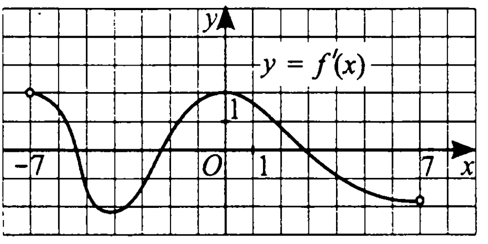


Рис. 31.

B9. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_2 и C многогранника, изображённого на рисунке 32. Все двугранные углы многогранника прямые.

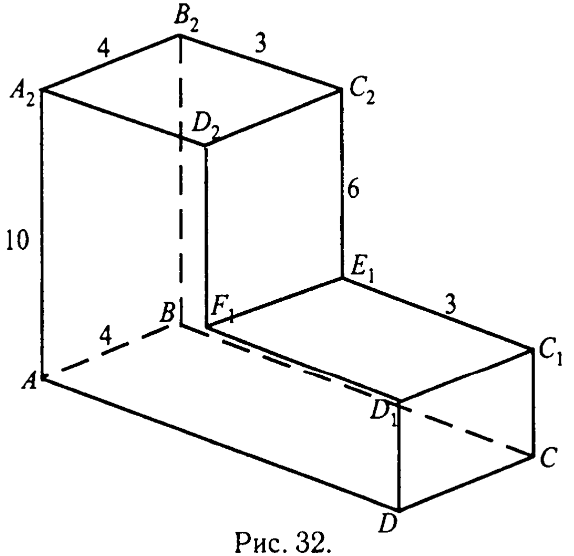


Рис. 32.

B10. В шкафу у Людмилы Аркадьевны лежало 80 пакетиков чая, из них 32 — чёрный чай, 14 — белый, 12 — красный, а остальные пакетики — зелёный чай. Какова вероятность того, что наудачу взятый пакетик — с зелёным чаем?

B11. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 33 (все двугранные углы многогранника прямые).

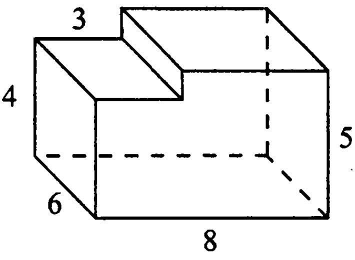


Рис. 33.

B12. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет форму бочки (цилиндра), а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле $F_A = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l$, где R — радиус цилиндра, l — его линейный размер, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g = 9{,}8$ Н/кг — ускорение свободного падения.

Если $l = 5$ м, то какой максимальный радиус (в метрах) может иметь аппарат, чтобы его эксплуатация была возможна в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 588 000 Н? (Считать π равным 3.)

B13. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых соответственно равны 85 км/ч и 45 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он проходит мимо товарного поезда, равно 1,2 минутам. Ответ дайте в метрах.

B14. Найдите точку максимума функции $y = (x+7)^2(x-4)+11$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $3^{2\cos^2 x - \sin 2x} = 3$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2. На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка Q — середина этого ребра. Найдите синус угла между прямой C_1Q и плоскостью AA_1C.

C3. Решите неравенство $\log_3 \log_4 \dfrac{4x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x+1}{4x-1}$.

C4. В параллелограмме $AMPK$ биссектрисы углов при стороне AM делят сторону KP точками T и F так, что $PF : FT = 2 : 11$. Найдите AM, если $MP = 26$.

C5. При каких значениях параметра a уравнение
$(x-a)^2 + \ln \dfrac{\sqrt{a^2+2}-a}{e^4} - \ln(-2x) = 0$ имеет ровно 1 корень?

C6. Каждое из чисел 3, 4, ..., 15 умножили на каждое из чисел 13, 14, ..., 22 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом поставили знак плюс или минус, после чего все 130 полученных результатов сложили.
а) Какую наибольшую по модулю сумму можно получить в итоге?
б) Можно ли в итоге получить 0?
в) Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

Вариант №7

Часть 1

B1. Для приготовления малинового варенья на 1 кг малины требуется 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 16 кг малины?

B2. На графике (см. рис. 34) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 25 сентября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

B3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображён ромб (см. рис. 35). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

B4. Строительной фирме нужно приобрести 70 кубометров строительного бруса у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

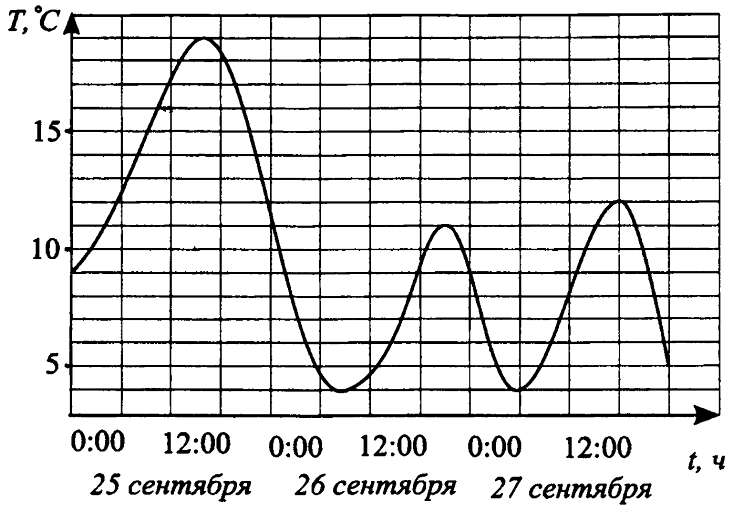


Рис. 34.

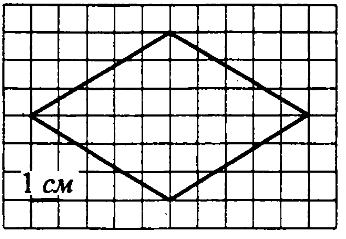


Рис. 35.

Поставщик	Цена бруса (руб. за $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2400	16 400	
Б	2600	2300	При заказе на сумму больше 190 000 руб. доставка бесплатно
В	2700	4700	При заказе на сумму больше 170 000 руб. доставка бесплатно

В5. Найдите корень уравнения $\log_3(x+4) = \log_3(5x+2)$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $BC = 8$. Найдите $\cos A$.

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{36}{\sin\left(-\frac{38\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right)}$.

B8. На рисунке 36 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 5]$.

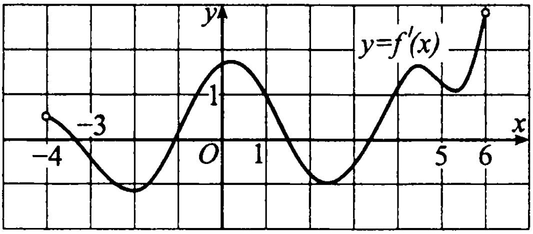


Рис. 36.

B9. Найдите расстояние между вершинами A и K, если K — середина стороны D_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 6$.

B10. В среднем на каждые 75 страниц без опечаток в новом словаре приходится 25 страниц с опечатками. Какова вероятность того, что на наугад открытой странице есть опечатки?

B11. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, высота равна 2 (см. рис. 37). Найдите диаметр основания цилиндра.

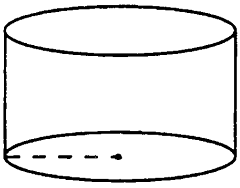


Рис. 37.

B12. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревания T_1 (в кельвинах) КПД этого двигателя будет не менее 37,5%, если температура холодильника $T_2 = 270$ К?

B13. Моторная лодка прошла против течения реки 144 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите точку минимума функции $y = (5 - x)e^{2-x}$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $5^{2\cos^2 x - 2\sin 2x} = 0{,}2$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

C2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, $\angle ACA_1 = \operatorname{arcctg} 2$, $\angle DBD_1 = \operatorname{arcctg} 4$, $CC_1 = 1$. Найдите объём призмы.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 6 \cdot 5^{1-x} \leqslant 77 - 5^{x+1}, \\ \log_x 1{,}5 \cdot \log_{1,5} \dfrac{4x}{9} + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

C4. Две окружности с радиусами 36 и 9 касаются внешним образом. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность, касательную к двум данным окружностям и к их общей внешней касательной.

C5. При каких значениях параметра a уравнение $e^x - (a^2 - 3a + 1)x = 0$ имеет ровно 1 корень?

C6. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до M. Можно выбрать любые два числа, стереть их и записать на доске вместо них их разность. Можно ли многократным повторением такой процедуры добиться того, чтобы на доске остались только нули?

а) При условии $M = 48$.

б) При условии, что остаток от деления числа M на 4 равен 1.

в) Решите задачу для всех значений числа M.

Вариант №8

Часть 1

B1. Билет в театр стоит 500 руб. Какое максимальное количество билетов можно купить на 5000 рублей после повышения цены билета на 15%?

B2. На графике (см. рис. 38) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 21 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

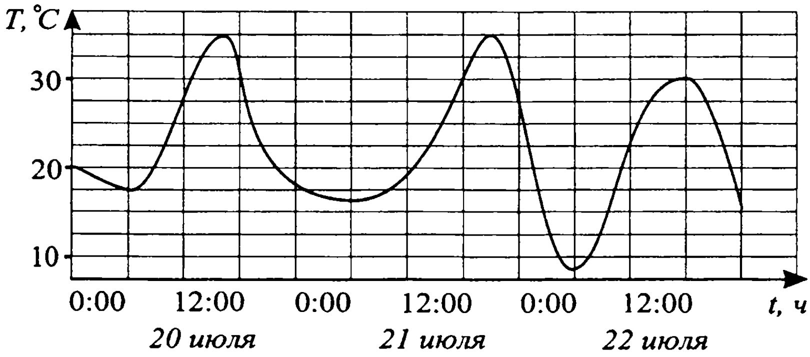


Рис. 38.

B3. Найдите площадь треугольника (см. рис. 39), вершины которого имеют координаты $(2; 2)$, $(9; 6)$, $(11; 2)$.

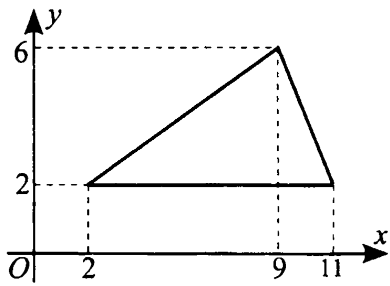


Рис. 39.

B4. Планируется купить 150 кг краски у одного из трёх поставщиков. Цена и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	**Стоимость 1 кг краски (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия доставки**
1	190	10 000	При заказе товара на сумму свыше 35 000 рублей доставка бесплатная.
2	210	8000	
3	220	8000	При заказе товара на сумму свыше 30 000 рублей доставка бесплатная.

B5. Найдите корень уравнения $\log_{17}(5x + 7) = \log_{17} 22$.

B6. В треугольнике ABC (см. рис. 40) угол B равен $90°$, $BC = 4$, $\operatorname{tg} C = 0{,}75$. Найдите AC.

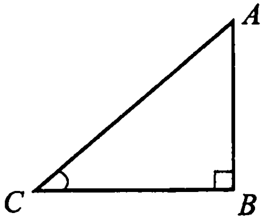


Рис. 40

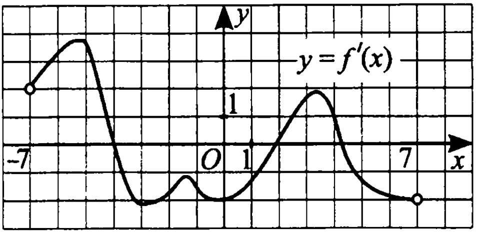


Рис. 41

B7. Найдите значение выражения $\log_4 25{,}6 + \log_4 10$.

B8. На рисунке 41 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $(-6; 5)$.

B9. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $5\sqrt{6}$. Найдите расстояние между точками K и N, если точка K — середина AB, а точка N — середина B_1C_1 (см. рис. 42).

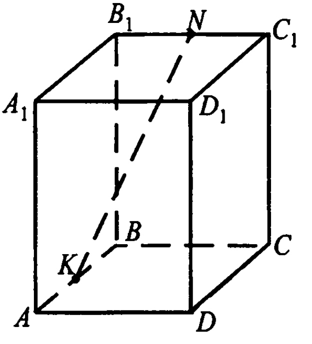


Рис. 42

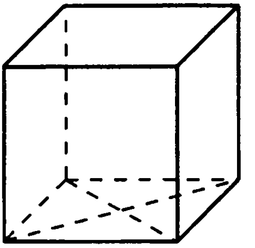


Рис. 43

B10. Среди посетителей парикмахерской в среднем на 26 новых клиентов приходится 14 клиентов, которые там уже когда-либо стриглись. Найдите вероятность того, что в пятницу последним будет обслуживаться клиент, посещавший эту парикмахерскую раньше.

B11. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20 (см. рис. 43).

B12. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна произведению площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma \cdot S \cdot T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана-Больцмана, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах.

Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = 6 \cdot 10^{24}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $2{,}7702 \cdot 10^{31}$ ватт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

B13. Два велосипедиста одновременно отправились в пробег протяжённостью 84 километра. Первый ехал со скоростью на 5 км/ч больше скорости второго и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = (2x - 14)e^{x-6}$ на отрезке $[5; 7]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $8 - 4\sin^2 x = \sin 2x \operatorname{ctg} x - 9\cos x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

C2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, $\angle ACA_1 = \operatorname{arcctg} 3$, $\angle DBD_1 = \operatorname{arcctg} 4$, $CC_1 = 2$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3 \cdot 7^x + 4 \cdot 7^{1-x} \geqslant 19, \\ 3 - \log_{\frac{4}{5}}(0{,}64x) \cdot \log_x \frac{4}{5} \geqslant 0. \end{cases}$$

C4. Две окружности с радиусами 16 и 144 внешне касательны. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность, касательную к двум данным и к их общей внешней касательной.

C5. При каких значениях параметра a уравнение $e^{(a^2-5a-4)x} + 3x = 0$ имеет более 1 решения?

C6. Таблица $n \times n$ заполнена натуральными числами. Назовём 3 клетки блоком, если они образуют одну из следующих фигур (см. рис. 44).

а) Чему равно минимально возможное значение n, если таблицу можно разделить на непересекающиеся блоки?

б) Сколько чётных чисел в таблице, если сумма чисел в каждом блоке нечётна?

в) Сколько различных значений принимают числа в таблице, если суммы чисел во всех блоках одинаковы?

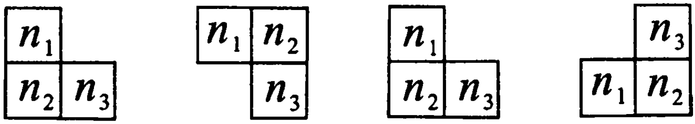


Рис. 44.

Вариант №9

Часть 1

В1. Тетрадь стоит 50 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 570 рублей после понижения цены на 10%?

В2. На диаграмме (см. рис. 45) показана среднемесячная температура воздуха в некотором населённом пункте за каждый месяц 1915 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев указанного периода средняя температура была неотрицательной.

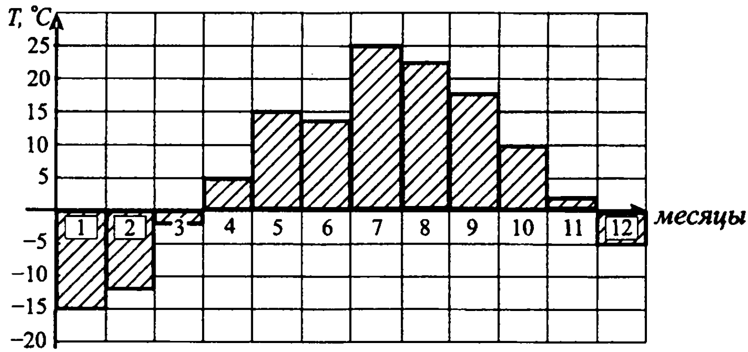


Рис. 45.

В3. Найдите площадь параллелограмма (см. рис. 46), вершины которого имеют координаты (2; 4), (2; 7), (10; 1), (10; 4).

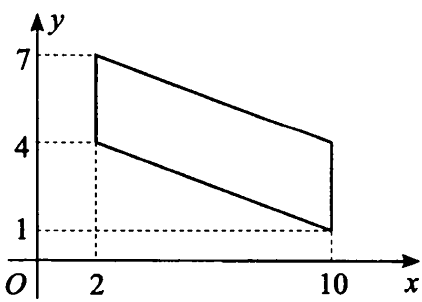


Рис. 46.

В4. Квартиросъёмщику предоставлено электроснабжение по тарифу 3,23 руб. за 1 кВт·ч. Расход электроэнергии в зимние месяцы составлял 250 кВт·ч в месяц. Однако жилец предполагает, что в летние месяцы сумма оплаты может уменьшиться на 20% за счёт экономии при использовании электроприборов. Найдите предполагаемую сумму оплаты за июль (в рублях).

B5. Найдите корень уравнения $\sqrt{10-2x}=4$.

B6. Сторона AB треугольника ABC равна 7. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника (см. рис. 47).

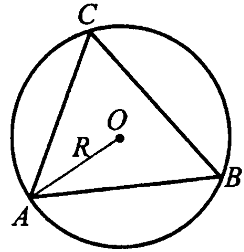


Рис. 47.

B7. Найдите значение выражения $3^{4+\log_3 6}$.

B8. На рисунке 48 изображён график некоторой функции $F(x)$, которая является одной из первообразных функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-2}^{5} f(x)dx$.

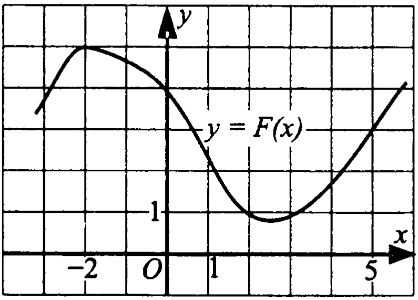


Рис. 48

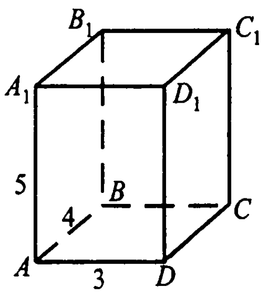


Рис. 49

B9. Найдите угол A_1CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=5$ (см. рис. 49). Ответ дайте в градусах.

B10. В концерте школьной самодеятельности выступают по очереди 6 восьмиклассников, 7 девятиклассников, 8 десятиклассников и 4 одиннадцатиклассника. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, что четвёртым не будет выступать девятиклассник?

B11. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 50). Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы, если площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 18.

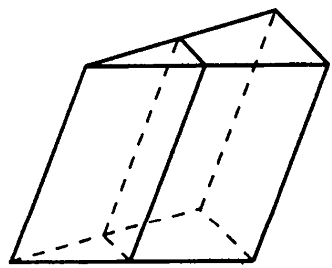


Рис. 50.

B12. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \dfrac{m}{m+M} v \cos\alpha$ (м/с), где $m = 60$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 240$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,2 м/с?

B13. Прогулочный катер вышел в 14:00 из пункта A в пункт B, расположенный в 20 км от A. Пробыв 15 минут в пункте B, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что скорость катера равна 12 км/ч.

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{5}{x} + 2013$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}; 10\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $4^{\operatorname{ctg} x \cos 3x} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\cos 4x - \sin 3x}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

C2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, в котором $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$. Высота призмы равна $2\sqrt{6}$. Найдите MN, где M — середина CC_1, а N — середина AB.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x), \\ \sqrt{1 - 9\log^2_{\frac{1}{8}} x} > 1 - 4\log_{\frac{1}{8}} x. \end{cases}$$

C4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O так, что одна из них делится в отношении $1 : 2$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 8.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\sqrt{16-x} - 1\right| = ax - 32a - 4$ имеет ровно один корень.

C6. На плоскости даны 7 отрезков. Длина каждого отрезка является натуральным числом, не превосходящим 12. Пусть n — число различных треугольников, которые можно составить из этих отрезков (например, из отрезков с длинами 2, 2 и 3 можно составить треугольник, а из отрезков с длинами 3, 4 и 7 — нельзя; один и тот же отрезок может использоваться для разных треугольников, но не может использоваться дважды для одного треугольника).

а) Может ли $n = 36$?

б) Может ли $n = 34$?

в) Найдите наименьшее возможное значение n, если среди данных отрезков нет трёх равных.

Вариант №10

Часть 1

B1. Полуторалитровая бутылка воды стоит 15 рублей 50 копеек. Какое наибольшее число литров воды можно купить на 200 рублей, если покупать воду только в таких полуторалитровых бутылках?

B2. На диаграмме (см. рис. 51) показана среднемесячная температура воздуха в некотором населённом пункте за каждый месяц 1915 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1915 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

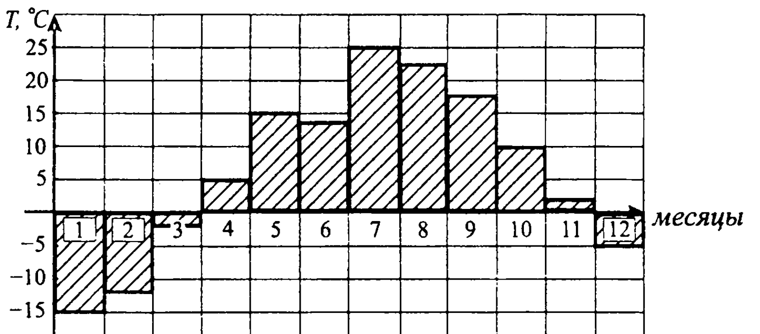


Рис. 51.

B3. Найдите площадь трапеции (см. рис. 52), вершины которой имеют координаты (2; 3), (2; 5), (10; 1), (10; 7).

B4. В квартире установлен однотарифный счётчик, по которому оплата идёт по тарифу 3,23 руб за кВт·ч. В дневное время расход электроэнергии составляет 150 кВт·ч в месяц, а в ночное время — 190 кВт·ч в месяц. Однако имеется возможность установить двухтарифный счёт, при этом

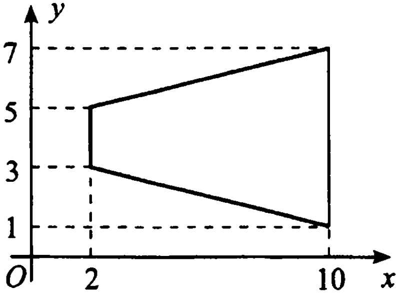


Рис. 52.

дневной расход оплачивается по тарифу 3,23 руб за 1 кВт·ч, а ночной расход — по тарифу 1,80 руб за 1 кВт·ч. Найдите предполагаемую сумму (в рублях) ежемесячной экономии после установки двухтарифного счётчика.

B5. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x+1} = 6$.

B6. В ромбе $ABCD$ угол DBC равен 68° (см. рис. 53). Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.

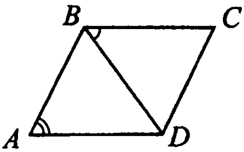


Рис. 53

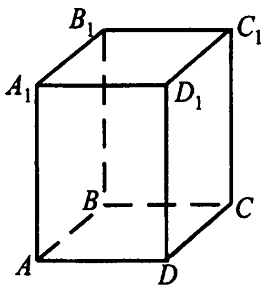


Рис. 54

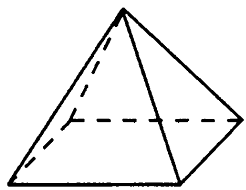


Рис. 55

B7. Найдите значение выражения $4^{2+\log_4 7}$.

B8. Прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. Найдите угол B_1DC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 12$, $C_1C = 16$, $AD = 20$ (см. рис. 54). Ответ дайте в градусах.

B10. На витрине магазина с системой самообслуживания стоит 96 упаковок йогурта, из них 21 — с клубничной начинкой, 31 — с малиновой, 15 — с банановой. Артём взял наудачу 1 упаковку йогурта. Какова вероятность того, что это йогурт с клубничной или банановой начинкой?

B11. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 6 (см. рис. 55). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

B12. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d\sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решетке с периодом, не превосходящим 3000 нм?

B13. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, выехал с постоянной скоростью велосипедист, а через полчаса после него со скоростью на 10 км/ч больше выехал второй велосипедист. Найдите скорость первого велосипедиста, если в пункт B он прибыл на 30 минут позже второго. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin x - 8x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\sin 4x + \operatorname{ctg} 2x \cos 4x = \cos 2x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

C2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 10$. Найдите расстояние между прямой CC_1 и прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой CM_1, где M_1 — середина стороны A_1B_1.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}, \\ 4x\log_5 x \geqslant (x^2+3)\log_5 x. \end{cases}$$

C4. Прямая касается двух окружностей с радиусами 4 и 8 в точках K и M соответственно. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $KM = 5$.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\sqrt{x+12} - 2\right| = ax - 1{,}5 + 24a$ имеет ровно три корня.

C6. На плоскости даны 8 отрезков. Длина каждого отрезка является натуральным числом, не превосходящим 20. Пусть n — число различных треугольников, которые можно составить из этих отрезков (например, из отрезков с длинами 2, 2 и 3 можно составить треугольник, а из отрезков с длинами 3, 4 и 7 — нельзя; один и тот же отрезок может использоваться для разных треугольников, но не может использоваться дважды для одного треугольника).

а) Может ли $n = 60$?

б) Может ли $n = 55$?

в) Найдите наименьшее возможное значение n, если среди данных отрезков нет трёх равных.

Вариант №11

Часть 1

B1. Стаканчик сырых семечек стоит 5 рублей, а жареных — на 60% больше. Какое наибольшее количество стаканов жареных семечек можно купить на 100 рублей?

B2. На графике (см. рис. 56) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте в течение трёх суток, начиная с 0 часов пятницы (на оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия). Определите по графику разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха в выходные дни (суббота и воскресенье). Ответ дайте в градусах Цельсия.

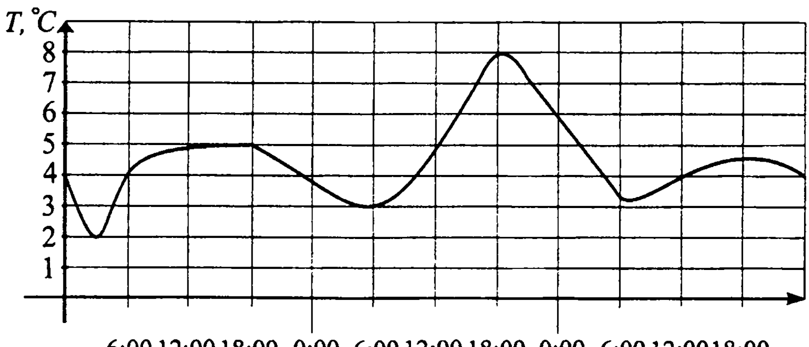


Рис. 56.

B3. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(3; 7)$ относительно начала координат (см. рис. 57).

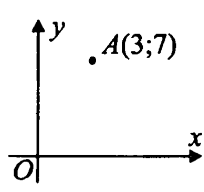


Рис. 57.

B4. Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

7. Зак. № 293

Поставщик	Цена пенобетона (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2300	4500	
Б	2250	5500	При заказе на сумму больше 100 000 рублей доставка бесплатно
В	2350	3700	При заказе более 60 м^3 доставка бесплатно

B5. Найдите корень уравнения $\sqrt{57-3x} = 3$.

B6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110°, угол CAD равен 65° (см. рис. 58). Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

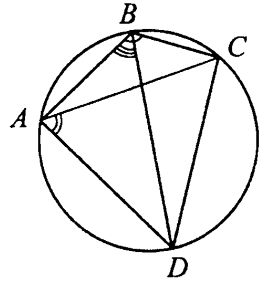


Рис. 58.

B7. Найдите значение выражения

$$\frac{73}{\sin^2 64^\circ + \sin^2(-26)^\circ}.$$

B8. Точка движется по координатной прямой по закону $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 6t - 42$ (S — расстояние в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента начала движения). Найдите, в какой момент времени (в секундах) её скорость равна 198 м/с.

B9. Диагональ куба равна $2\sqrt{3}$. Найдите сторону куба.

B10. На курсы по английскому языку записалось 25 человек. Их разбили на 5 групп: в первой — 7 человек, во второй — 6 человек, а в остальных группах участников поровну. Какова вероятность того, что Василий Пончиков, записавшийся на курсы, попадёт в пятую группу?

B11. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$ (см. рис. 59). Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

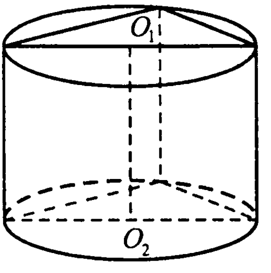


Рис. 59.

B12. Очень лёгкий заряженный металлический шарик с зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 2$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_л = qvB \sin\alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0°; 180°]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была не менее чем $25 \cdot 10^{-9}$ Н? Ответ дайте в градусах.

B13. Из пункта A в пункт B со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через час из пункта B в пункт A выехал автомобилист со скоростью в 2 раза больше, чем скорость мотоциклиста. Найдите расстояние от пункта A до пункта B, если они встретились на одинаковом расстоянии от A и B. Ответ дайте в км.

B14. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\cos x - \frac{24}{\pi}x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\log_5(\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 125) = 3$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C2. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом со стороной 2, а диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ и плоскостью ADC_1.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{3x} x \geqslant \log_x \frac{3}{x} + 2, \\ 5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leqslant 0. \end{cases}$

C4. Точка L — середина отрезка KM, длина которого равна 12. Проведены три окружности радиуса 10 с центрами в точках K, L и M. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных окружностей.

C5. Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases} 4y^2 + 12x = 36 + x^2, \\ y = \sqrt{10x - x^2 - 16} + a \end{cases}$ имеет не менее 2 решений.

C6. На доске написано 2013-значное число n.

а) Найдите минимально возможную сумму цифр числа n, если известно, что n делится на 60.

б) Найдите минимально возможную сумму цифр числа n^2, если известно, что n делится на 45.

в) Найдите минимально возможную сумму цифр числа n, если известно, что n делится на 7.

Вариант №12

Часть 1

B1. Чай продаётся в упаковках по 25 пакетиков. За день в офисе расходуется 17 пакетиков. Какое минимальное количество упаковок чая необходимо купить в офис на две недели? (Считать, что офис работает без выходных.)

B2. На диаграмме (см. рис. 60) показана среднемесячная температура воздуха в некотором городе за каждый месяц 1913 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в указанном году было месяцев со среднемесячной температурой воздуха не более $+5°$ C.

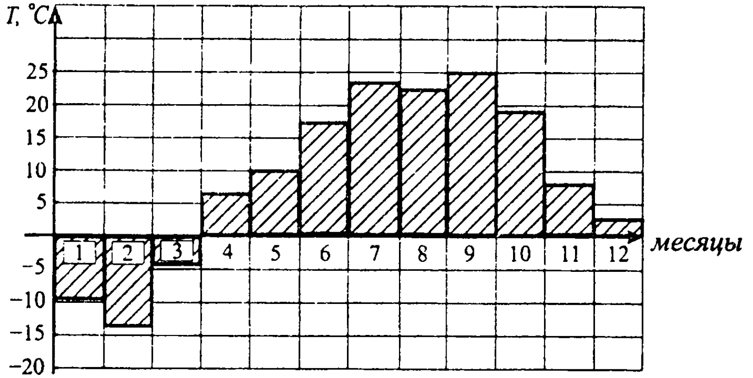


Рис. 60.

B3. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(-3; 2)$ имеет координаты $(5; 4)$ (см. рис. 61). Найдите абсциссу точки B.

B4. Строительной фирме нужно приобрести 80 кубометров строительного бруса у одного из трёх поставщиков. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

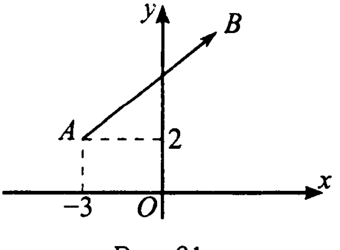


Рис. 61.

Поставщик	Цена строительного бруса (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2450	8000	
Б	2600	8200	При заказе на сумму больше 150 000 рублей доставка бесплатно
В	2400	8500	При заказе на сумму больше 200 000 рублей доставка бесплатно

B5. Решите уравнение $-x = \dfrac{x+6}{-3x-4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

B6. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 86, её бо́льшая боковая сторона равна 27 (см. рис. 62). Найдите радиус окружности.

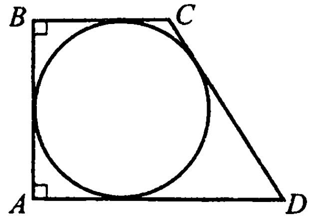


Рис. 62.

B7. Найдите $50\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

B8. Прямая $y = -x - 3$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3{,}5x^2 + x - 1$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. Высота цилиндра равна 12, диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите радиус основания.

B10. В соревнованиях по го участвует 26 спортсменов, из них 6 — россияне. Перед началом первого тура спортсменов разбивают на пары случайным образом. Какова вероятность того, что в первом туре россиянин Алексей Никитенко будет играть со своим соотечественником?

B11. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 63). Найдите объём куба.

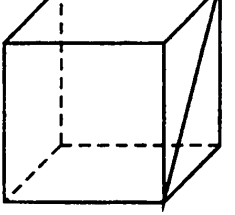


Рис. 63.

B12. Плоский замкнутый контур площадью $S = 0{,}3$ м^2 находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS\cos\alpha$, где α — острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 25 \cdot 10^{-4}$ Тл/с —

постоянная, S — площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $375 \cdot 10^{-6}$ В?

B13. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км, выехал велосипедист со скоростью 40 км/ч. Когда он проехал ровно половину пути от A до B, следом за ним выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста за 10 км до пункта B. Найдите скорость сближения между велосипедистом и мотоциклистом. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\cos x + 3\sqrt{3}x - \pi\sqrt{3} + 8$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\log_7 (5\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x + 49) = 2$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \pi\right]$.

C2. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом со стороной 3, а диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{21}$. Найдите угол между плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ и плоскостью ADC_1.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} \dfrac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x+2) > -\log_{\frac{1}{2}} 4, \\ \dfrac{1}{\lg x} + \dfrac{1}{1-\lg x} > 1. \end{cases}$$

C4. Точка L — середина отрезка KM, длина которого равна 12. Проведены три окружности радиуса 2 с центрами K, L и M. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся трёх данных.

C5. Найти все значения a, при которых система $\begin{cases} y^2 + 6x = x^2 + 9, \\ y = a + \sqrt{2x - x^2 + 15} \end{cases}$ имеет ровно 1 решение.

C6. На доске написано 1001-значное число n.
а) Найдите максимально возможную сумму цифр числа n, если n^2 делится на 50.
б) Найдите максимально возможную сумму цифр числа n, если n делится на 120.
в) Найдите максимально возможную сумму цифр числа n, если n делится на 11.

Вариант №13

Часть 1

B1. Киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 20 копеек. Счётчик электроэнергии показывал 1 сентября 11 345 кВт·ч, а 1 октября — 11 525 кВт·ч. Сколько рублей надо заплатить за электроэнергию за сентябрь?

B2. На рисунке 64 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю в некоторые дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указываются даты месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Определите по рисунку, в который из дней в ноябре 2008 года было выгоднее всего купить евро. В ответе укажите число месяца.

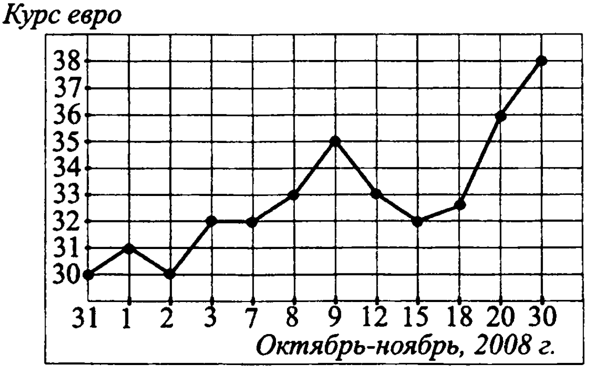


Рис. 64.

B3. Окружность с центром в начале координат проходит через точку A $(-20; 15)$. Найдите её радиус.

B4. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	**Абонентская плата**	**Плата за 1 минуту разговора**
Повременный	100 руб. в месяц	0,4 руб.
Комбинированный	250 руб. за 8 часов в месяц	0,3 руб. за 1 минуту сверх 8 часов в месяц
Безлимитный	330 руб.	0 руб.

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 600 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно составит 600 минут? Ответ укажите в рублях.

B5. Найдите корень уравнения $\log_2(x+1) = 2$.

B6. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите площадь треугольника ABC.

B7. Найдите значение выражения $8^{\log_2 5}$.

B8. На рисунке 65 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

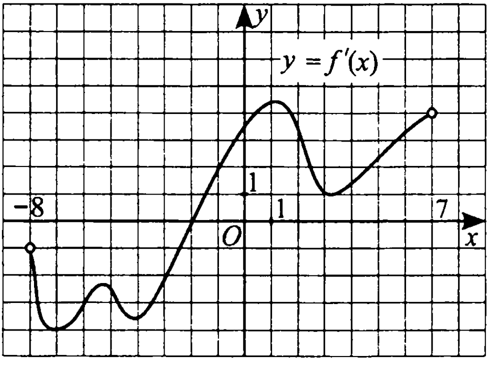


Рис. 65.

B9. Образующая конуса наклонена к плоскости основания конуса под углом 60°. Найдите радиус основания, если длина образующей равна 15.

B10. Синоптики сказали, что вероятность дождя в понедельник — 0,7, во вторник — 0,6, в среду — 0,5. Найдите вероятность того, что за эти 3 дня дождя не будет ни разу, если прогноз синоптиков достоверен.

B11. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 66). Уровень воды достигает 20 см. На какой высоте (в сантиметрах) будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого?

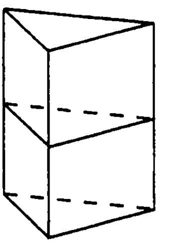


Рис. 66.

B12. Камень бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности Луны. Время полета камня (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 5 секунд, если камень бросают с начальной скоростью $v_0 = 8$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 1{,}6$ м/с^2.

B13. От пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним со скоростью на 2 км/ч больше отправился второй. Расстояние между пристанями равно 255 км. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно со вторым. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5\ln(x+4) + 2$ на отрезке $[-3; 0]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 2\cos 2x + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

C2. Радиус основания цилиндра равен 5. В цилиндре проведено сечение плоскостью, параллельной его основаниям и равноудалённой от них. В окружности этого сечения проведена хорда $CD = 8$. В окружности верхнего основания этого цилиндра проведена хорда AB, параллельная CD и равная 6. AB и CD лежат по разные стороны от некоторой плоскости, проведённой через ось симметрии цилиндра. Найдите угол между плоскостью $ABCD$ и плоскостью нижнего основания этого цилиндра, если его высота равна 7.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^2}(3-2x) > 1, \\ |x^3 - 1| > 1 - x. \end{cases}$$

C4. Расстояние между центрами двух окружностей равно 50. Одна из окружностей имеет радиус 25, вторая — 30. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Найдите длину хорды AB, если $AB = 2BC$.

C5. При каких значениях параметра a уравнение

$\frac{a}{3}x^3 + (a-2)x^2 - 8x + 1 = 0$ имеет ровно 2 решения?

C6. Решите в целых числах уравнение $4 \cdot 3^x - 35 = y^2$.

Вариант №14

Часть 1

B1. Клиент взял в банке кредит 100 000 рублей на год под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами (начисляемыми при получении кредита). Сколько рублей должен клиент вносить в банк ежемесячно?

В2. На рисунке 67 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю в некоторые дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указываются даты месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Определите по рисунку, в который из дней в ноябре 2008 года было выгоднее всего продать евро.

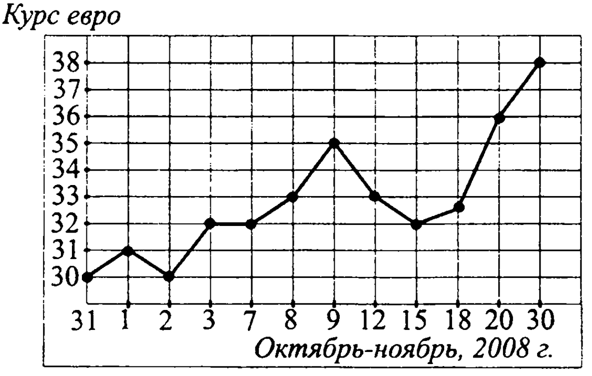


Рис. 67.

В3. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 68), вершины которого имеют координаты (2; 3), (8; 6), (12; 1), (12; 3).

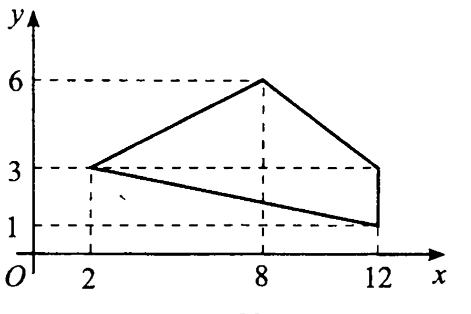


Рис. 68.

В4. Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 14 рублей, а стоимость проезда в автобусе — 9 рублей. Андрей каждый день ездит в институт и домой без пересадок на маршрутке. Сколько рублей за 30 дней он сэкономит, если будет вместо маршрутки возвращаться домой на автобусе?

B5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 27$.

B6. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 17 соответственно, боковые стороны равны 13. Найдите тангенс острого угла трапеции.

B7. Найдите значение выражения $2^{2+\log_4 121}$.

B8. На рисунке 69 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите, в какой точке отрезка $[2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

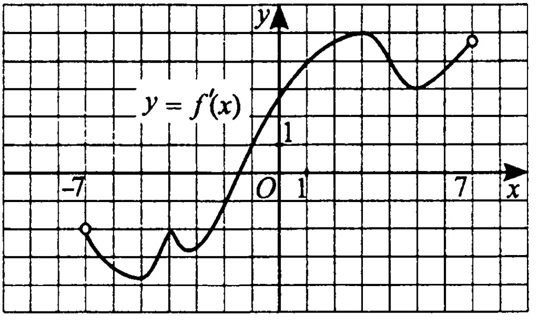


Рис. 69.

B9. Диаметр основания цилиндра равен $13\sqrt{3}$, диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите образующую цилиндра.

B10. Учитель математики предупредил Серёжу, что каждый урок будет вызывать его к доске с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что за 3 урока в начале следующей недели Серёжа ни разу не выйдет к доске на уроке математики?

B11. Объём первого конуса равен 18 м^3. У второго конуса высота в четыре раза меньше, а радиус основания в два раза больше, чем у первого. Найдите объём второго конуса. Ответ дайте в кубических метрах.

B12. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера (в Н·м), стремящейся повернуть рамку, определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 8$А — сила тока в рамке, $B = 0{,}05$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0{,}03$ м — размер рамки, $N = 500$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,09 Н·м?

B13. Первый и второй рабочие, работая вместе, могут выполнить заказ за 16 дней, второй и третий — за 12, первый и третий — за 16 дней. За сколько дней они выполнят весь заказ, работая вместе?

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10x-x^2-29}$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

C2. В окружности сечения цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям и равноудалённой от них, проведена хорда CD, стягивающая дугу величиной 90°. В окружности нижнего основания цилиндра проведена хорда AB, параллельная CD и стягивающая дугу величиной 60°. AB и CD лежат по одну сторону от некоторой плоскости, проведённой через ось симметрии цилиндра. Найдите угол между плоскостью $ABCD$ и плоскостью верхнего основания этого цилиндра, если его радиус и высота равны $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и 3 соответственно.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1, \\ \log_{0,5}(x-3) - \log_{0,5}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0. \end{cases}$$

C4. Две окружности с радиусами R и r $(R > r)$ касаются в точке A. Определите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие лежат на разных окружностях, если $R = 5$, $r = 3$.

C5. При каких значениях параметра a уравнение

$\frac{(a-1)^2}{3}x^3 + (a^2 - 4a + 3)x^2 + 8x + a = 1 + 8ax$ имеет более

2-х решений?

C6. Яблоки, имеющиеся на складе, вначале поместили в ящики вместимостью 70 кг каждый, но один ящик оказался заполненным не полностью. Тогда все яблоки поместили в ящики вместимостью 50 кг каждый, при этом понадобилось на 9 ящиков больше, и все равно один из ящиков оказался заполненным не полностью.

а) Сколько килограммов яблок было на складе при условии, что в ящики вместимостью 40 кг каждый можно уложить все яблоки, заполнив все ящики полностью и использовав при этом на 8 ящиков больше (чем в случае с ящиками по 50 кг)?

б) Какое наименьшее число ящиков по 70 и 50 кг нужно взять, чтобы их можно было полностью заполнить всеми яблоками на складе из пункта *а*?

в) Какое наименьшее целое число килограммов яблок может быть на складе без учёта условия из пункта *а*?

Вариант №15

Часть 1

B1. Килограмм апельсинов стоит 35 рублей. Сколько рублей сдачи получит покупатель со ста рублей при покупке 1 кг 700 г апельсинов?

B2. На рисунке (см. рис. 70) жирными точками отмечено среднесуточное давление воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 19 февраля 2010 года. Для наглядности жирные точки на графике соединены линиями. По графику определите наибольшее среднесуточное давление (в мм рт. ст.) в период с 14 по 19 февраля.

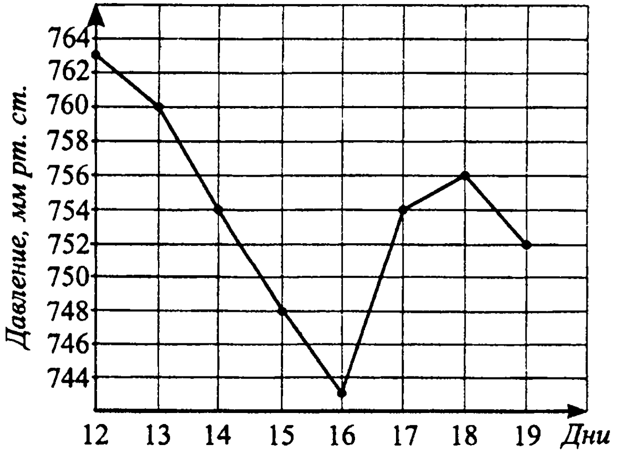


Рис. 70.

B3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см изображён квадрат (см. рис. 71). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

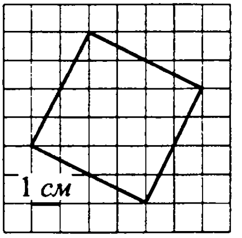


Рис. 71.

B4. Амвросий загружает на свой компьютер из интернета файл размером 96 Мб за 1 минуту 54 секунды, Аристарх — файл размером 98 Мб за 1 минуту 56 секунд, а Ануфрий — файл размером 94 Мб за 1 минуту 53 секунды. Сколько секунд будет загружаться файл размером 3920 Мб на компьютер с самой высокой скоростью загрузки?

B5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}} = \dfrac{1}{2}$.

B6. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как 4 : 7 : 9 (см. рис. 72). Найдите бо́льшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что периметр его равен 338.

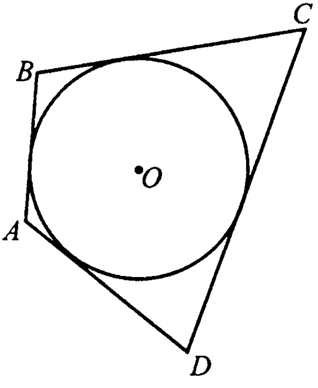


Рис. 72.

B7. Найдите значение выражения

$$\frac{18\sqrt[65]{\sqrt[33]{a}} - 11\sqrt[15]{\sqrt[143]{a}}}{14\sqrt[39]{\sqrt[55]{a}}} \text{ при } a \neq 0.$$

B8. На рисунке 73 изображён график некоторой функции $f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$.

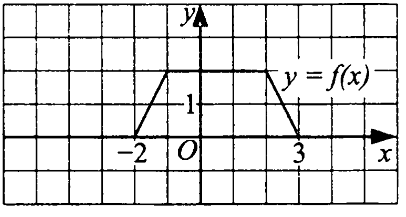


Рис. 73.

B9. Площадь боковой поверхности конуса равна 25π, образующая конуса равна 10. Найдите диаметр основания.

B10. Игорь бросил наудачу 3 игральных кубика. Какова вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков? Ответ округлите до сотых.

B11. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 74. В ответе укажите значение величины $\frac{V}{\pi}$.

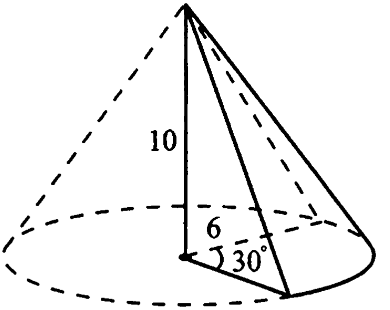


Рис. 74.

B12. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 2\cos\pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее 0,24 Дж. Ответ выразите десятичной дробью; если нужно, округлите до сотых.

B13. Заказ на 99 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа медленнее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что он за час делает на 2 детали больше, чем первый?

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{2x} + 2^x - 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $(2\sin^2 x + 11\sin x - 6)(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x) = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

C2. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ высота DH равна стороне основания. Точка K — середина бокового ребра DA. Найдите угол наклона прямой KH к плоскости основания пирамиды.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^x+8} 4}{\log_{2^x+8}(-4x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{2}} 2^x}$.

C4. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} (a + x - 1)(6 + ax) \leqslant 0, \\ a + 4x - x^2 \geqslant 1 \end{cases}$$
не имеет решений.

С6. Целые числа от 3 до 19 включительно (без повторений) разбиты на пять групп так, что в каждой из них есть по крайней мере три числа. Для каждой группы вычисляется сумма всех входящих в неё чисел. Для каждой пары вычисленных сумм находится модуль разности и полученные значения модулей складываются.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученной суммы модулей?

Вариант №16

Часть 1

В1. Поставщик привозит в магазин пирожные, а в магазине после наценки 40% от первоначальной стоимости их продают по цене 21 рубль. Сколько пирожных можно купить у поставщика на 70 рублей?

В2. Посев семян моркови рекомендуется проводить в начале мая при дневной температуре воздуха не ниже $+8°C$. На рисунке 75 жирными точками показан прогноз дневной температуры воздуха в течение первых двух недель мая. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Определите, в течение скольких дней за период с 3 по 12 мая можно производить посев моркови, если прогноз окажется верным.

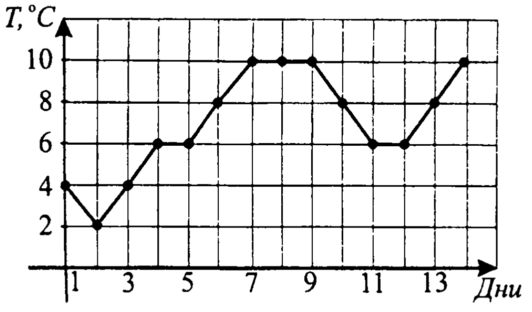


Рис. 75

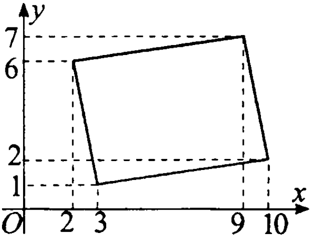


Рис. 76

В3. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 76), вершины которого имеют координаты (2; 6), (3; 1), (9; 7), (10; 2).

В4. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 кубометров пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 45 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2200 рублей, щебень стоит 700 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

B5. Найдите корень уравнения $5^{3x+7} = 0{,}04$.

B6. Меньшая сторона прямоугольника равна 12, угол между диагоналями равен 60°. Найдите радиус описанной окружности (см. рис. 77).

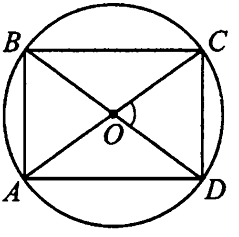


Рис. 77.

B7. Найдите значение выражения $17\,\mathrm{tg}\,68° \cdot \mathrm{tg}\,158°$.

B8. На рисунке 78 изображён график некоторой функции $f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_2^4 f(x)dx$.

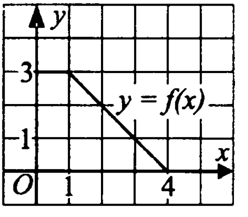


Рис. 78.

B9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна удвоенной площади основания. Найдите высоту цилиндра, если радиус основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

B10. В случайном эксперименте бросают наудачу 2 игральных кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет менее 4 очков. Ответ округлите до сотых.

B11. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, высота которого равна 2 (см. рис. 79). Найдите радиус цилиндра, если известно, что площадь боковой поверхности призмы равна 12.

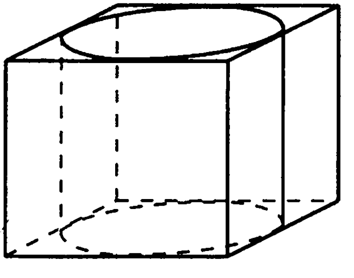


Рис. 79.

B12. После дождя уровень воды (в метрах) в колодце может повыситься. Мальчик определяет его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$. До дождя время падения камушков составляло 0,8 с. На какую высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с? (Ответ выразите в метрах.)

B13. На шлифовку 264 деталей мастер затрачивает на четыре часа меньше, чем ученик на шлифовку 256 таких же деталей. Известно, что мастер за час шлифует на шесть деталей больше, чем ученик. Сколько деталей в час шлифует мастер?

B14. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение

$$\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos^2 x + \sin 2x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

C2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SH в два раза меньше диагонали основания. Точка K делит боковое ребро SA в отношении $1:2$, считая от вершины A. Найдите угол наклона прямой KH к плоскости основания пирамиды.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\log_{4^x-5} 64}{\log_{4^x-5}(-256x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_4 \log_{\frac{1}{4}} 4^x}$.

C4. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (3a - 2x - 6)(x^2 + a^2 - 8x - 10a + 16) \leqslant 0, \\ a + x^2 \leqslant 8x - 8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

C6. Целые числа от 5 до 23 включительно (без повторений) разбиты на шесть групп так, что в каждой из них есть по крайней мере три числа. Для каждой группы вычисляется сумма всех входящих в неё чисел. Для каждой пары вычисленных сумм находится модуль разности и полученные значения модулей складываются.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученной суммы модулей?

Вариант №17

Часть 1

B1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата программиста составила 35 тысяч рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?

B2. На рисунке 80 показана зависимость напряжения в электрической цепи фонарика от времени его работы. По горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, по вертикальной — напряжение в вольтах. На сколько вольт упадёт напряжение в электрической цепи фонарика за первые 5 часов работы?

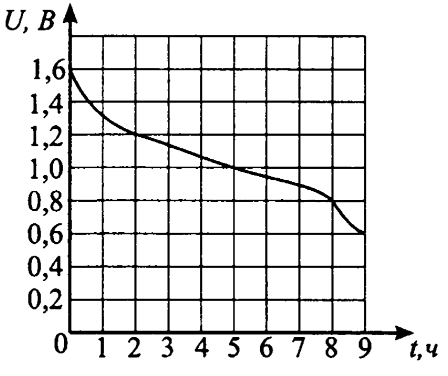


Рис. 80

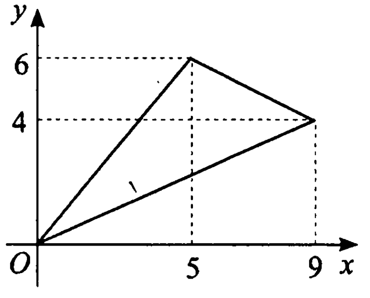


Рис. 81

B3. Найдите площадь треугольника (см. рис. 81), вершины которого имеют координаты (0; 0), (5; 6), (9; 4).

B4. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 8 тонн природного камня и 10 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 5 тонн щебня и 49 мешков цемента. Тонна камня стоит 1500 рублей, щебень стоит 670 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько тысяч рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

B5. Решите уравнение $-x = \sqrt{15 - 2x}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

B6. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $6+3\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник (см. рис. 82).

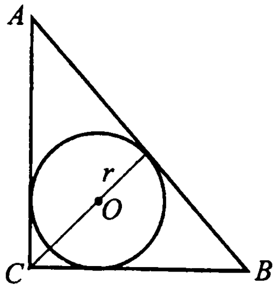


Рис. 82

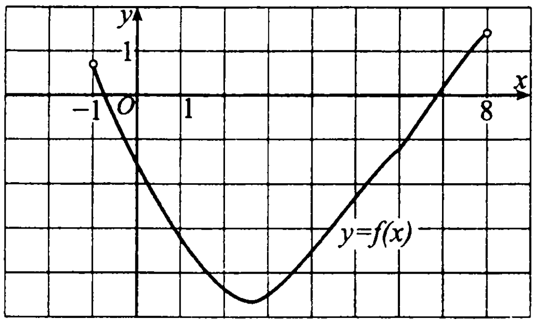


Рис. 83

B7. Найдите значение выражения $9^{\frac{\ln 6}{\ln 3}}$.

B8. На рисунке 83 изображён график $y = f(x)$, определённый на интервале $(-1; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

B9. В конусе радиус основания равен 6, площадь полной поверхности равна 180π. Найдите длину образующей конуса.

B10. На трёх карточках написали буквы «Б», «Е» и «Г» и положили в ряд слева направо в случайном порядке. Найдите вероятность того, что получилось слово «БЕГ». Ответ округлите до сотых.

B11. Ребро куба равно 5. Насколько нужно его увеличить, чтобы площадь поверхности куба увеличилась на 144 (см. рис. 84)?

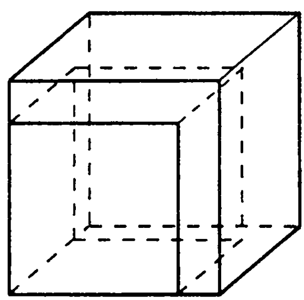


Рис. 84.

B12. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 200$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}25$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ K — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем $345 \cdot 10^3$ Дж? Ответ приведите в атмосферах.

B13. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 675 литров она заполняет на 2 минуты быстрее, чем первая труба?

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \log_2(x+3)^2$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $12\cos^4 x = \cos 2x + 3$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

C2. Точка O лежит на ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $DO : DD_1 = 1 : 5$, точка P является точкой пересечения диагоналей грани $ABCD$. Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины C.

C3. Решите неравенство

$$\log_3\left((5^{-x^2}-7)(5^{-x^2+9}-1)\right) + \log_3\frac{5^{-x^2}-7}{5^{-x^2+9}-1} - \log_3(5^{2-x^2}-1)^2 > 0.$$

C4. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 10. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются прямой BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

C5. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} |y+a| = |x| - 5, \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y = 51 \end{cases}$$ имеет чётное ненулевое число решений.

C6. На доске выписали n последовательных натуральных чисел, затем одно из них стёрли. Сумма оставшихся на доске чисел равна S.

а) Какое число стёрли, если $n = 3$, $S = 368$?

б) Какое число стёрли, если $n = 9$, $S = 2554$?

в) Найдите наибольшее возможное значение n, если $S = 5000$.

Вариант №18

Часть 1

B1. Маршрутное такси за месяц проезжает 10 000 км. Стоимость одного литра бензина составляет 21,2 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 11 л. Каковы ежемесячные затраты (в руб.) на бензин для одного маршрутного такси?

B2. На рисунке 85 показана зависимость напряжения в электрической цепи фонарика от времени его работы. По горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, по вертикальной — напряжение в вольтах. Найдите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 В до 0,8 В.

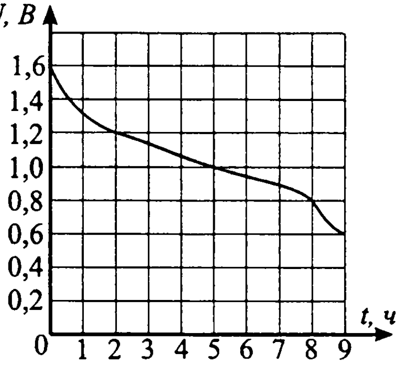


Рис. 85

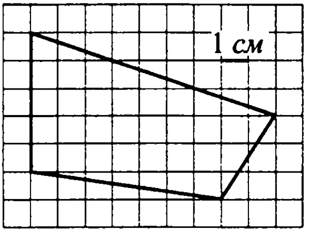


Рис. 86

B3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 86). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

B4. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки по маршруту протяжённостью 1200 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	**Топливо**	**Расход топлива (л на 100 км)**	**Арендная плата (руб. за сутки)**
А	Дизельное	8	2500
Б	Бензин	9,5	2350
В	Газ	15	2300

Цена дизельного топлива 20 рублей за литр, бензина — 23 рубля за литр, газа — 13 рублей за литр.

B5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1} = 125$.

В6. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $5\sqrt{3}$ (см. рис. 87). Найдите сторону этого треугольника.

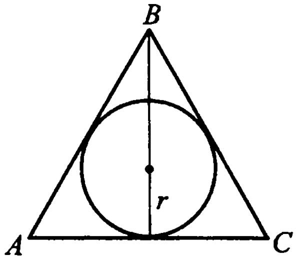


Рис. 87

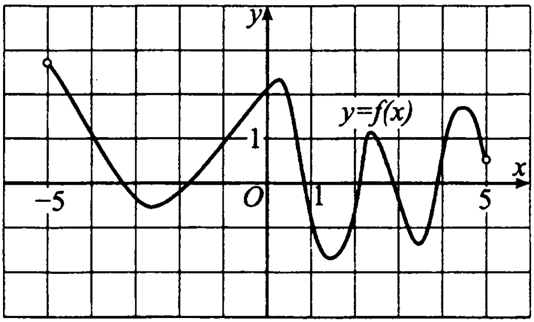


Рис. 88

В7. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $5\sin^2\alpha + 12\cos^2\alpha = 9$.

В8. На рисунке 88 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

В9. В треугольной пирамиде $SABC$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A, ребро AS перпендикулярно плоскости основания, а рёбра BS и SC образуют угол в $60°$ (см. рис. 89). Найдите длину ребра AS, если $SC = 2\sqrt{2}$.

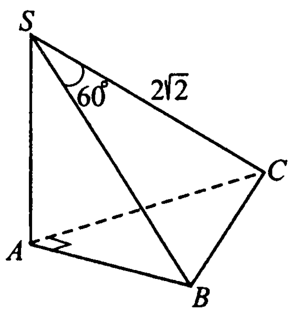


Рис. 89

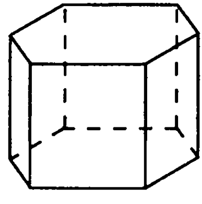


Рис. 90

В10. В непрозрачном мешке лежит 5 карточек: с буквой «О», с буквой «В», с буквой «Е», с буквой «К» и с буквой «Й». Максим по очереди достал 2 карточки, положив их на стол слева направо в порядке вытаскивания. Какова вероятность того, что получилось слово «ОЙ»?

В11. Объём правильной шестиугольной призмы равен $3\sqrt{3}$, сторона основания равна 2 (см. рис. 90). Найдите высоту призмы.

B12. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 25°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду с начальной температурой $T_в = 65°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(°C)$, причем $x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}$ (м), где $c = 4200\frac{Дж}{кг\cdot°C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\frac{Вт}{м\cdot°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?

B13. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 336 литров она заполняет на минуту дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 375 литров?

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \log_2(x+6)^2$ на отрезке $[-5{,}5;\ 0]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x} = \frac{1}{2}\sin 4x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K лежит на ребре AA_1, точка M лежит на отрезке D_1C_1, длина ребра $BC = 10$. Найдите косинус угла между прямой KM и диагональю куба, которая выходит из вершины B, если $AK : KA_1 = 2 : 3$, $D_1M : MC_1 = 7 : 3$.

C3. Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(2^{-x^2} - 4\right)\left(2^{-x^2+1} - 1\right)\right) - \log_2\frac{2^{-x^2} - 4}{2^{-x^2+1} - 1} \geqslant \log_2\left(2^{5-x^2} - 8\right)^2.$$

C4. В треугольнике ABC $AB = 2\sqrt{39}$, $BC = 14$, $AC = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются прямой BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

C5. Найдите все значения a, при которых система

$\begin{cases} |y| = |x+a| + 2, \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y = 29 \end{cases}$ имеет чётное ненулевое число решений.

С6. На доске выписали n последовательных натуральных чисел, затем одно из них стёрли. Сумма оставшихся на доске чисел равна S.
а) Какое число стёрли, если $n = 3$, $S = 478$?
б) Какое число стёрли, если $n = 8$, $S = 2423$?
в) Найдите наибольшее возможное значение n, если $S = 4000$.

Вариант №19

Часть 1

В1. Мобильный телефон стоил 6650 рублей, а после снижения цены стал стоить 5852 рубля. На сколько процентов была снижена цена?

В2. На рисунке 91 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю в некоторые дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указываются даты месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Какой доход (в рублях) получит человек, купивший 100 евро 9 ноября, а продавший их 20 ноября?

Рис. 91.

В3. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(-20; 0), (0; 21), (-20; 21)$.

В4. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки по маршруту протяжённостью 1500 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за сутки)
А	Дизельное	6,5	3670
Б	Бензин	9,6	3200
В	Газ	13,2	3250

Цена дизельного топлива 16 рублей за литр, бензина — 20 рублей за литр, газа — 15 рублей за литр.

B5. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{4}}(1-3x) = -2$.

B6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $BC = 8$, $BH = 2\sqrt{7}$. Найдите $\cos\angle A$.

B7. Найдите значение выражения $2x-7+\sqrt{4x^2-20x+25}$, если $x = 2,5$.

B8. На рисунке 92 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(-3; 10)$. Найдите сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.

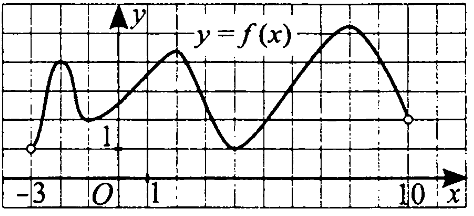


Рис. 92.

B9. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ угол, образованный рёбрами SA и SC, равен $90°$. Найдите высоту пирамиды, если сторона основания равна $\sqrt{2}$.

B10. Александр назвал наудачу одно из трёхзначных чисел. Найдите вероятность того, что оно не делится на 11.

B11. В окружность основания цилиндра вписан правильный треугольник (см. рис. 93). Найдите объём пирамиды той же высоты, что и цилиндр, в основании которого лежит этот треугольник, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

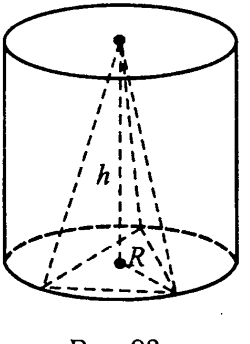


Рис. 93.

B12. Два тела массой $m = 3$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 24 джоулей?

В13. Первый сплав содержит 15% железа, а второй — 30%. Масса первого сплава на 2 кг меньше массы второго сплава. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 25% железа. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

В14. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{5}{2}} - 6x\sqrt{x} + 18$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $2\log_4^2 \sin x - x^2 + 21 = \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 + 7\log_4 \sin x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

С2. На шаровой поверхности лежат все вершины треугольника ABC. Точка O — центр шара. Найдите угол между прямой AO и плоскостью треугольника, если $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AO = 12{,}5$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x + 2^{103{,}5} < \left(2^{100} + 2^{3{,}5}\right) \cdot 2^x, \\ \log_3 \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}} + \log_{\frac{x-3}{\sqrt{x-2}}} 3 \leqslant 2. \end{cases}$$

С4. В трапеции $ABCD$ точки K, L, M, N лежат соответственно на AB, BC, CD и DA так, что $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{BL}{BC} = \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{DN}{DA} = \dfrac{1}{2}$. Найдите S_{KLMN}, если $\angle ADB = 30^\circ$, $AB = BC = 6$, $\sin \angle ABD = \dfrac{2}{3}$, $BC \parallel AD$.

С5. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 + (1 - 5a)x + 2a^2 + a + |x^2 + (a - 5)x + 4 - a|$ меньше 4?

С6. В стране 20 городов. Если два каких-либо города соединены прямой дорогой (без захода в другие города), то только одной. Среди любых трёх городов хотя бы 2 соединены между собой прямой дорогой. В стране найдётся как минимум 2 города, которые никак не соединены друг с другом (то есть нельзя добраться из одного города в другой ни напрямую, ни через другие города).

а) Может ли из всех городов выходить одинаковое число дорог?

б) Сколько всего дорог в стране, если из столицы выходит 11 дорог?

в) Каким может быть максимальное число дорог в этой стране при этих условиях (без учёта пункта б)?

Вариант №20

Часть 1

В1. Во фруктовом отделе магазина находится 1000 фруктов, причём 76% из них не цитрусовые. Известно, что 65% цитрусовых составляют не апельсины. Сколько апельсинов в отделе?

В2. На графике (см. рис. 94) жирными точками представлено изменение стоимости акций мебельной компании в период с 18 июля по 5 августа. Для наглядности жирные точки соединены линиями. 20 июля предприниматель купил пакет акций, а 4 августа продал его и в результате получил прибыль 2700 рублей. Сколько акций было в пакете?

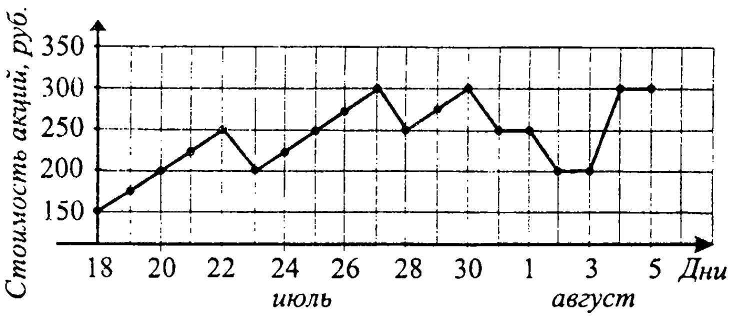


Рис. 94.

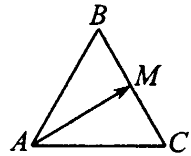


Рис. 95.

В3. Стороны правильного треугольника ABC равны $3\sqrt{3}$ (см. рис. 95). Найдите длину вектора AM, где M — середина BC.

В4. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	400 рублей в год	4%
Б	20 рублей в месяц	3,5%
В	бесплатно	2%

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей сроком на 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

B5. Решите уравнение $\log_3(7x+1) = 3\log_9 4$.

B6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна 22, а $\cos C = \frac{4\sqrt{6}}{11}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

B7. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2a-15)^2}$, если $3 < a < 7{,}5$.

B8. На рисунке 96 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

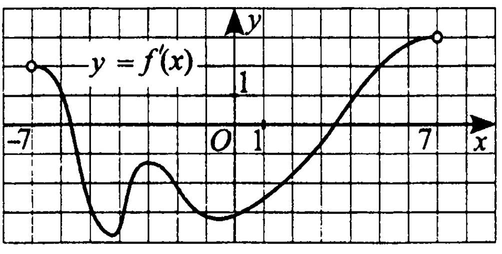


Рис. 96

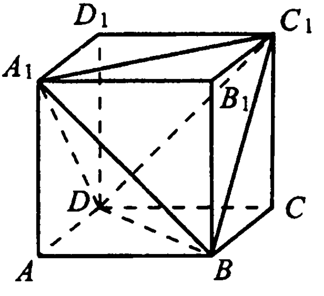


Рис. 97

B9. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$, $SO = 11$, $AC = 10\sqrt{3}$. Найдите боковое ребро SD.

B10. Какова вероятность того, что 2 человека, случайно севшие за 1 парту, родились в один и тот же день недели? Ответ округлите до сотых.

B11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 97). Объём треугольной пирамиды A_1BC_1D равен 3. Чему равен объём куба?

B12. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м?

B13. Семья состоит из мужа, жены и их сына студента. Если стипендию сына увеличить в 5 раз, то общий доход семьи увеличится на 18%. Если зарплата мужа уменьшится в 11 раз, то общий доход семьи уменьшится вдвое. Сколько процентов от общего дохода составляет зарплата жены?

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 + 8x + 17)e^{x-3} + 1$ на отрезке $[0; 3]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение
$\sqrt{\cos^2 4x + 2\cos 4x + 1} - \sqrt{(2\cos 4x - 5)^2} = -5{,}5.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

C2. На шаровой поверхности лежат все вершины равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой меньшее основание BC равно боковой стороне, а острый угол равен 60°. Точка O — центр шара. Найдите угол между прямой AO и плоскостью трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{2 - x - x^2} + 1 \leqslant \sqrt{x^2 + 6x + 32}, \\ 12^x - 2^{2x+1} - 5 \cdot 3^x + 10 \leqslant 0. \end{cases}$$

C4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, расстояния от центра окружности до её оснований BC и AD равны 4 и 3 соответственно, синус угла ACD равен 0,8. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон $ABCD$.

C5. Найдите все значения, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + (5 - 3a)x + 2a^2 - 6 + |x^2 - (a + 5)x + 2a + 6|$ больше 8?

C6. В стране 23 города. Если два каких-либо города соединены прямой дорогой (без захода в другие города), то только одной. Среди любых трёх городов хотя бы 2 соединены между собой прямой дорогой. В стране найдётся как минимум 2 города, которые никак не соединены друг с другом (то есть нельзя добраться из одного города в другой ни напрямую, ни через другие города).

а) Может ли из всех городов выходить одинаковое число дорог?

б) Сколько всего дорог в стране, если из столицы выходит 6 дорог?

в) Каким может быть минимальное число дорог в этой стране при этих условиях (без учёта пункта б)?

Вариант №21

Часть 1

B1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы работник получил 13 485 рублей. Сколько составляет его заработная плата? (Ответ дайте в рублях.)

B2. На графике (см. рис. 98) жирными точками указана стоимость акций косметической компании в первые две недели декабря. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Предприниматель купил 30 акций 9 декабря и собирается получить прибыль, равную 4500 рублей. Какого числа предприниматель должен продать все акции, чтобы получить в точности ту прибыль, на которую он рассчитывал?

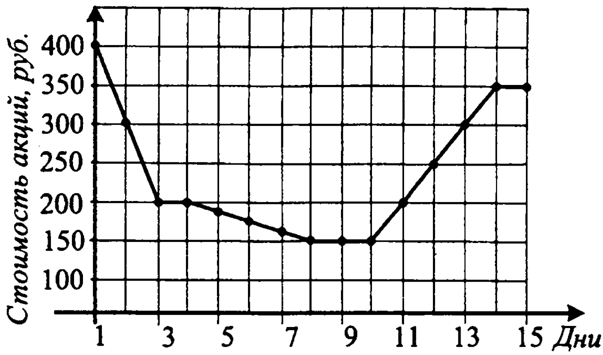


Рис. 98.

B3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 99). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

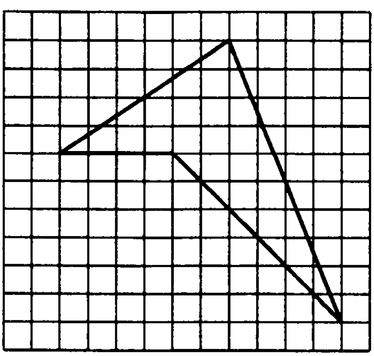


Рис. 99.

В4. Магазин одежды «Успех» заключает договоры с поставщиками продукции. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу одежды, поступает в доход магазина.

Фирма-производитель	Процент выручки, поступающей в доход магазина	Примечание
«Добро»	5%	Все изделия
«Счастье»	7%	Все изделия
«Истина»	6%	Изделия ценой до 5000 рублей
«Истина»	4%	Изделия ценой свыше 5000 рублей

В прейскурантах приведены цены на 4 вида продукции.

Фирма-производитель	Изделие	Цена
«Истина»	Куртка «Зимняя»	6400 рублей
«Счастье»	Футболка «Королевская»	3000 рублей
«Истина»	Куртка «Осенняя»	4800 рублей
«Добро»	Куртка «Тёплая»	5600 рублей

Определите, продажа какого вида одежды наиболее выгодна магазину. В ответе запишите, сколько рублей поступит в доход магазина от продажи единицы этой продукции.

В5. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\frac{\pi(4x-7)}{3} = -\frac{1}{2}.$$

В6. В равнобедренном треугольнике с основанием 6 и высотой, проведённой к основанию, равной 4, найдите радиус описанной окружности (см. рис. 100).

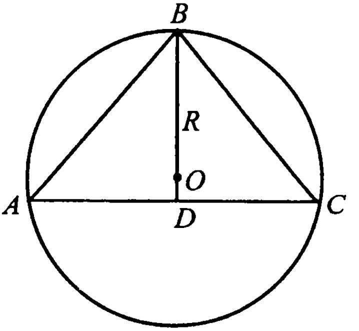


Рис. 100.

B7. Найдите значение выражения $\log_4 5 \cdot \log_5 64$.

B8. На рисунке 101 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{3}{x} - 4$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

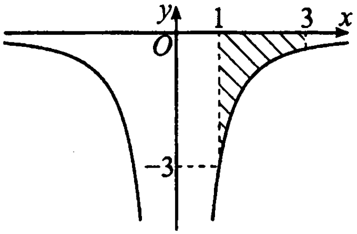


Рис. 101

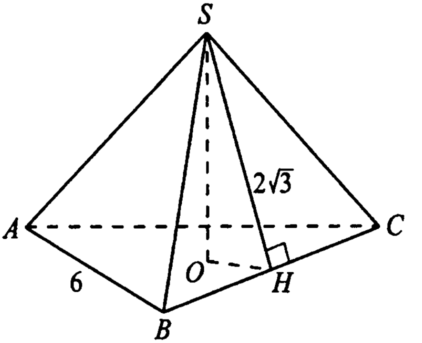


Рис. 102

B9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка O — центр основания ABC, S — вершина, сторона основания равна 6, апофема боковой грани равна $2\sqrt{3}$ (см. рис. 102). Найдите высоту пирамиды.

B10. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет 4. Какова вероятность того, что игральную кость подбросят ровно 3 раза? Ответ округлите до сотых.

B11. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 103). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объём пирамиды, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

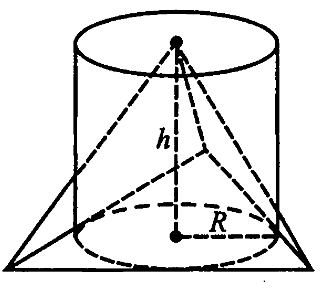


Рис. 103.

B12. Кран в днище бочки летнего душа забыли закрыть. Вода вытекает из бочки, пока она не станет пустой. Пока в бочке есть вода, высота столба воды меняется по закону $H(t) = 1{,}69 - 2{,}08 \cdot t + 0{,}64 \cdot t^2$, где t — время в минутах. Сколько минут вода будет вытекать из бочки?

B13. Рабочие прокладывают дорогу длиной 9,6 км, ежедневно увеличивая норму на одно и то же количество километров. В первый день они проложили 0,5 км дороги, а в последний — 1,9 км. Сколько дней длилась вся работа?

B14. Найдите наименьшее значение функции $y = 7\operatorname{tg} x - 2x + 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\left(1 - \cos^2 x\right)\log_2\left(x^2 - 9\right) = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2. Два сечения сферы с центром в точке O, проходящие через её диаметр AB, пересекаются под углом 30°. О точках C и D известно следующее:

1) точка C лежит в первом сечении, а точка D во втором;

2) точки C и D находятся на максимальном расстоянии от диаметра сферы AB;

3) треугольник COD остроугольный.

Найдите угол между прямыми BC и BD.

C3. Решите неравенство
$\log_5^2(x-8) - 6\log_5(\sqrt{x-8}) \geqslant 4 - 25(x-8)\cdot\left(\log_5(x-8) - 4\right)$.

C4. В треугольнике ABC на стороне AC выбраны точки E и K так, что $AE : EK : KC = 3 : 2 : 4$. Медиана AD пересекает прямые BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площади треугольника BLM к площади треугольника ABC.

C5. Переменные x и y связаны условием $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $ax + y - 4$ не превосходит 12.

C6. Найдите все пары таких натуральных чисел k и n, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n^5}\right)^k = \left(\frac{1}{k^5}\right)^n$.

Вариант №22

Часть 1

B1. На спидометре американского автомобиля скорость указывается в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 75 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

B2. На графике (см. рис. 104) жирными точками указана стоимость акций компании «Море и горы» в первые две недели октября. Для наглядности жирные точки соединены линиями. В первую неделю октября бизнесмен купил 18 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?

Рис. 104.

B3. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 105), вершины которого имеют координаты (2; 2), (6; 7), (9; 1), (13; 4).

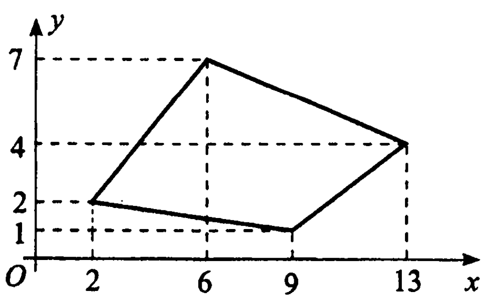


Рис. 105.

B4. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	3 руб. за 1 MB
План «400»	500 руб. за 400 MB трафика в месяц	2 руб. за 1 MB сверх 400 MB
План «800»	750 руб. за 800 MB трафика в месяц	1 руб. за 1 MB сверх 800 MB

Пользователь предполагает, что его трафик составит 700 MB в месяц и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик составит 600 MB?

B5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi(x-3)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

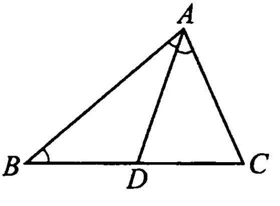


Рис. 106.

B6. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, а длина стороны AC равна 9. Найдите биссектрису AD этого треугольника, если $DC = 5$ (см. рис. 106).

B7. Найдите значение выражения $\log_{625} 7 \cdot \log_7 5$.

B8. На рисунке 107 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \sin 2x$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

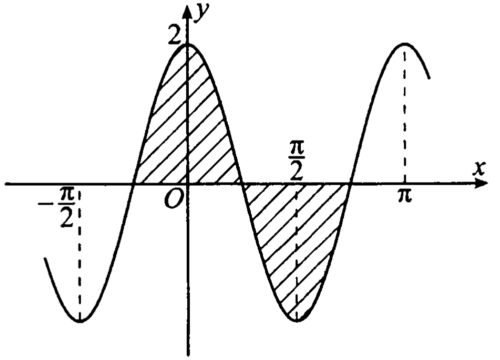


Рис. 107.

B9. В правильной шестигранной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 6. Найдите расстояние между точками A и E_1 (см. рис. 108).

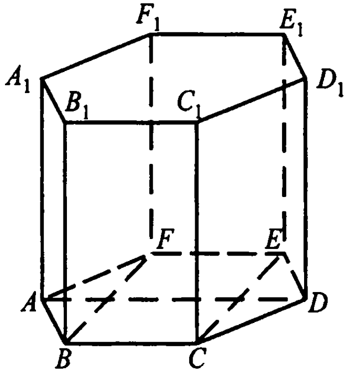


Рис. 108

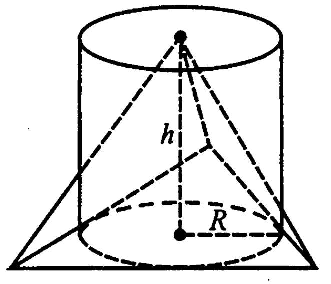


Рис. 109

B10. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет 2. Какова вероятность того, что игральную кость подбросят не менее 3 раз? Ответ округлите до сотых.

B11. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 109). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

B12. Брандспойт, закреплённый под определённым углом на пожарной машине, выстреливает струю воды с постоянной начальной скоростью. Высота струи воды описывается формулой $y = a \cdot x^2 + bx + c$, где $a = -\dfrac{1}{270}$ м$^{-1}$, $b = \dfrac{2}{3}$, $c = \dfrac{7}{3}$ м — постоянные параметры; x — расстояние от пожарной машины (в метрах). На каком максимальном расстоянии в метрах от забора нужно поставить машину, чтобы вода перелетала через верх? Высота забора равна 19 м.

B13. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Первый мотоциклист проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью меньше скорости первого на 20 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 126 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым мотоциклистом. Найдите скорость первого мотоциклиста, если известно, что она больше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

B14. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\operatorname{ctg} x + 4x + 3 - 2\pi$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\sin\left(\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(2\sin x + 1)$.

б) Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2. Два сечения сферы с центром в точке O пересекаются по диаметру AB. О точках C и D известно следующее:

1) точка C лежит в первом сечении, а точка D во втором;

2) точки C и D находятся на максимальном расстоянии от диаметра сферы AB.

Найдите угол между этими сечениями, если угол между прямыми BC и BD равен 60°.

C3. Решите неравенство
$\log_3^2(x-2) + 3(x-2)\cdot\left(2\log_3\sqrt{x-2}+3\right) \geqslant 7\log_3(x-2) + 30$.

C4. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает медиану BK и биссектрису BN в точках L и F соответственно. Найдите отношение $AB : BC : AC$, если $AL : LF : FD = 14 : 2 : 5$.

C5. Переменные x и y связаны условием $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 32 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $x - ay + 13$ превосходит 22.

C6. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано некоторое чётное число. Можно ли все числа в таблице сделать нечётными в каждом из трёх следующих случаев?

а) $n = 3$, за первый ход нужно поменять чётность у 1 числа, за второй — у двух чисел, за третий — у трёх и т.д.

б) $n = 2013^{2142}$. За j-ый ход нужно поменять чётность у $(n-1)^j$ чисел в таблице.

в) n — произвольное натуральное число. За первый ход нужно поменять чётность у 1 числа, за второй — у двух чисел, за третий — у трёх и т.д.

Замечание. Если для очередного хода в каждом из трёх случаев необходимо поменять чётность у большего количества чисел, чем их всего в таблице, то процесс останавливается перед этим ходом вне зависимости от текущего положения.

Ответы к заданиям В

№	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14
1	18	1,2	17,5	2,25	–15	24	216	2	27	0,15	45	13	2,5	2
2	4	25	12	2,75	–40	6	7,2	1,4	125	0,4	125	95	600	3
3	7	7250	14	1,6	–4	145	125	–0,9	15	0,38	700	60	60	4
4	6	3190	32	7250	4,5	51	0,2	1	149	0,55	2	15	3	3
5	18	–18	32	3067,2	5	–0,96	3	5	68	0,64	222	0,02	450 000	6
6	300	–16	4	5950	4	0,5	5	3	152	0,275	230	2	200	–7
7	20	19	30	184 300	0,5	0,6	–48	3	7	0,25	4	432	14	6
8	8	35	18	33 000	3	5	4	2	15	0,35	1040	3000	7	–2
9	12	8	24	646	–3	7	486	–2	45	0,72	36	60	4	2020,5
10	18	40	32	271,7	5	44	112	–1	45	0,375	84	30	20	3
11	12	5	–7	112 500	16	45	73	12	2	0,16	169	30	240	16,5
12	10	4	2	200 500	–2	8	–46	2	6	0,2	27	60	80	11
13	396	2	25	286	3	48	125	–3	7,5	0,06	5	30	15	–13
14	9 500	30	25	150	1	2,4	44	6	39	0,216	18	30	9,6	16
15	40,5	756	20	4640	–9,5	117	0,5	8	5	0,03	10	0,33	11	–1,25
16	4	5	36	13950	–3	12	–17	2	7	0,08	0,75	2,4	22	8
17	30450	0,6	17	14,13	–5	3	36	5	24	0,17	2	2,5	27	–18
18	23 320	6	34	6920	–1,25	30	0,75	4	2	0,05	0,5	45	21	–31
19	12	100	–10	8 900	–5	0,75	–2	11	1	0,91	0,75	90	6	3,6
20	84	27	4,5	20 451,6	1	10	10	–9	14	0,14	9	15	40,5	51
21	15 500	13	26	288	0,75	3,125	3	2	3	0,12	3	1,625	8	5
22	121	1260	36	750	–0,5	11,2	0,25	4	12	0,69	1	150	90	3

Ответы к заданиям С (начало)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
1	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$	$\operatorname{arctg}\frac{16}{15}$	$(1;2)$	28; 70	$\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{10}}{12};\frac{2}{3}\right)$	а) 10; б) 1440; в) 22
2	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{23\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}$	arctg 3,75	$[1;3)\cup(7;10]$	$55; 146\frac{2}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{19}-5}{12};0\right)\cup$ $\cup\left\{\frac{5+\sqrt{19}}{12}\right\}\cup\left(\frac{5}{6};+\infty\right)$	а) 20; б) 720; в) 31
3	а) $\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; б) $0; \pi; 2\pi; \frac{\pi}{2}$	1,25	$\left[\frac{5}{4};2\right)\cup(2;3)$	$\sqrt{16\pm\sqrt{11}}$	$\left(\frac{-5-4\sqrt{10}}{9};-\frac{2+\sqrt{39}}{5}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{-\sqrt{39}}{5};-1\right]$	а) 779; б) 37; в) 5; г) 12
4	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	20,8	$(-\infty;0)\cup$ $\cup[\log_5(15-2\sqrt{42});2)\cup$ $\cup(2;\log_5(15+2\sqrt{42})]$	$\sqrt{8\pm\sqrt{19}}$	$\left(-\infty;\frac{-5-\sqrt{55}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{-8+\sqrt{55}}{2};0\right)\cup$ $\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$	а) 665; б) 31; в) 3; г) 13
5	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	$(0;\ 0{,}8]\cup\{2\}$	33; 88	$-\frac{1}{2}$	а) 12 555; б) нет; в) 1.

Ответы к заданиям С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
6	а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$	30; 195	$\frac{7}{4}$	а) 20 475; б) нет; в) 1
7	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; $\operatorname{arctg} 3+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{4}; \operatorname{arctg} 3+\pi$	4	$(0;1)\cup\left[\frac{3}{2}; 1+\log_5 3\right]$	$12\sqrt{3}$; $972\sqrt{3}$	$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup$ $\cup\left\{\frac{3+\sqrt{5+4e}}{2}\right\}\cup$ $\cup\left\{\frac{3-\sqrt{5+4e}}{2}\right\}$	а) да; б) нет; в) можно для $M=4k$ и $M=4k-1$, где $k\in N$
8	а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}$	40	$(0; 1-\log_7 3]\cup$ $\cup[\log_7 4; 0{,}8]\cup$ $\cup(1; +\infty)$	$60{,}75\sqrt{3}$; $972\sqrt{3}$	$\left(\frac{5e-\sqrt{41e^2-12e}}{2e}; \frac{5e+\sqrt{41e^2-12e}}{2e}\right)$	а) 6; б) 0; в) 1
9	а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}$	3,5	$[0{,}5; 1)$	18; 72	$\left[-\frac{5}{16}; -\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{4}{17}; 0\right)$	а) нет; б) да; в) 1
10	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	5	$(0; 2]$	$\sqrt{41}$; 13	$\left(\frac{3}{32}; \frac{1}{8}\right)$	а) нет; б) да; в) 1

Ответы к заданиям С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
11	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg} 3+\pi n, n \in Z$; б) $\operatorname{arctg} 3$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$	0,9 или 1,8	$\left(\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}; 1\right]$	а) 3; б) 9; в) 2
12	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; $-\operatorname{arctg} 0{,}6+\pi k, k \in Z$; б) $\frac{\pi}{4}, \pi-\operatorname{arctg} 0{,}6$	$\frac{\pi}{6}$	$\left(1; \frac{5}{3}\right)$	4,5 или 9	$(2; 6] \cup \{-2-4\sqrt{2}\}$	а) 9000; б) 8997; в) 9007
13	а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; б) $\frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$	$(-3; -1)$	$10\sqrt{21}; 30$	$0; 8 \pm \frac{4\sqrt{42}}{3}; -\frac{27}{4}$	$(4; -17)$, $(4; 17)$, $(2; 1)$, $(2; -1)$
14	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi m, m \in Z$; $\operatorname{arctg} 6+\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 6$	$\operatorname{arctg} 3$	$(3; 9)$	$\frac{15\sqrt{3}}{7}; \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$	$\left(-\infty; -\frac{23}{4}\right) \cup \left(\frac{27-4\sqrt{42}}{3}; \frac{27+4\sqrt{42}}{3}\right)$	а) 1640; б) 24; в) 1451
15	а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; $\frac{\pi}{6}+\pi k, k \in Z$; б) $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$	60°	$[-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$	2; 3	$(-\infty; -3) \cup (1; 6)$	а) нет; б) нет; в) 6

Ответы к заданиям С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
16	а) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; $-\operatorname{arctg}2+\pi k, k\in Z$; б) $\frac{10\pi}{3}$; $3\pi-\operatorname{arctg}2$; $4\pi-\operatorname{arctg}2$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$	$[-16;-1)\bigcup\left(-\frac{1}{256};0\right)$	1; 3	$\left(-\infty;\frac{11-\sqrt{89}}{2}\right]\cup$ $\cup\left[\frac{40-2\sqrt{31}}{9};8\right]$	а) нет; б) нет; в) 8
17	а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$; б) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{9}$	$(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$	$2\sqrt{19}-5$; 5	$(6-8\sqrt{2};3-\sqrt{15})\cup$ $\cup(3-\sqrt{15};3+\sqrt{15})\cup$ $\cup(3+\sqrt{15};8\sqrt{2})$	а) 184; б) 317; в) 100
18	а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$, $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$	$\frac{9}{\sqrt{555}}$	$\sqrt{\log_2\frac{34}{9}}\leqslant\lvert x\rvert\leqslant$ $\leqslant\sqrt{\log_2\frac{30}{7}}$, $\lvert x\rvert\neq\sqrt{2}$	$12-\sqrt{39}$; $2+\sqrt{39}$	$(-4-7\sqrt{2};-2-\sqrt{13})\cup$ $\cup(-\sqrt{13}-2;\sqrt{13}-2)\cup$ $\cup(\sqrt{13}-2;7\sqrt{2})$	а) 239; б) 349; в) 89
19	а) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$	60°	$\left(\frac{7}{2};\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup$ $\cup\left\{\frac{15+3\sqrt{13}}{2}\right\}$	$\frac{7}{2}(2\sqrt{3}\pm\sqrt{5})$	$\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$	а) да; б) 94; в) 171

Ответы к заданиям C (окончание)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
20	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	60°	$[\log_3 2; 1]$	3,5; 24,5	$(3; +\infty)$	а) нет; б) 141; в) 121
21	а) $\pi k,\ k\in Z$, $k\neq 0; \pm\sqrt{10}$; б) $\pm\sqrt{10};\ \pm\pi;\ 2\pi$	$\arccos\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\left(8; 8\frac{1}{25}\right]\cup[633; +\infty)$	$\frac{3}{28}, \frac{5}{24}$	$[-\sqrt{11}; \sqrt{11}]$	$k=2$; $n=4$
22	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2},\ -\arcsin\frac{1}{3}$	90°	$\left(2; 2\frac{1}{27}\right]\cup[5; +\infty)$	8 : 5 : 8	$\left(-\infty; -\sqrt{\frac{119}{2}}\right)\cup$ $\cup\left(\sqrt{\frac{119}{2}}; +\infty\right)$	а) да; б) нет; в) да

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
3. Кодификатор элементов содержания для составления контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
4. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ №1897 от 17.12.2010.
6. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. Приказ МО РФ от 05.03.04 №1089.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.
8. *Евич Л. Н., Ольховая Л. С. и др.* Математика. Устные вычисления и быстрый счёт. Тренировочные упражнения за курс 7–11 классов: учебно-методическое пособие/Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. — 231 с.
9. *Лукин Р. Д., Лукина Т. К., Якунина М. С.* Устные упражнения по алгебре и началам анализа. — М.: Просвещение, 1989. — 96 с.

10. *Лысенко Ф. Ф., Кулабухов С. Ю. и др.* Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013: учебно-методическое пособие/Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2012. — 416 с.

11. *Лысенко Ф. Ф., Кулабухов С. Ю. и др.* Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013: учебно-методическое пособие/Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2012. — 272 с.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Иванов Сергей Олегович, **Ковалевская** Александра Сергеевна,
Коннова Елена Генриевна, **Кулабухов** Сергей Юрьевич,
Нужа Галина Леонтьевна, **Ольховая** Людмила Сергеевна,
Резникова Нина Михайловна, **Ханин** Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2013
УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *М. Федорова*

Подписано в печать с оригинал-макета 15.11.2012.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37.
Тираж 15000 экз. Заказ № 293

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО “Полиграфобьединение”, 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.