100 дней до ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

100 дней до ЕГЭ

Т.М. Виноградова
И.В. Лысикова
А.Н. Роганин
И.В. Третьяк

МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА

МОСКВА эксмо 2011

УДК 373.161.1:51
ББК 22.1я7
В 49

Виноградова Т. М.
В 49 ЕГЭ. Математика : Экспресс-подготовка / Т. М. Виноградова, И. В. Лысикова, А. Н. Роганин, И.В. Третьяк. — М. : Эксмо, 2011. — 240 с.

ISBN 978-5-699-44782-4

Издание адресовано выпускникам средней школы для подготовки к единому государственному экзамену по математике.

Пособие имеет уникальную структуру, предназначенную для экспресс-подготовки к ЕГЭ по математике. Весь материал разделен на 100 занятий, на каждое занятие отводится один день. Таким образом, всего за 100 дней ученик сможет успешно подготовиться к экзамену. Книга содержит тестовые задания в форме ЕГЭ (части А, В и С), а также подробные ответы и комментарии ко всем заданиям. На полях приводится краткая справочная информация.

Издание окажет помощь учителям, репетиторам и родителям при подготовке учащихся к ЕГЭ по математике.

УДК 373.161.1:51
ББК 22.1я7

ISBN 978–5–699–44782–4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Результаты единого государственного экзамена исключительно важны для выпускника и будущего абитуриента — они учитываются в школьном аттестате и при поступлении в вузы. Получить максимальный балл на ЕГЭ непросто, но с каждым годом увеличивается количество выпускников, которые блестяще с этим справляются.

Перед вами уникальное учебное пособие, одинаково необходимое выпускникам, их родителям и учителям.

Уважаемые выпускники!

Чтобы успешно сдать ЕГЭ, необходимы глубокие знания по математике и умение организовывать свою работу.

Итак,

1. **Что вы знаете?** Выполните пробный тест. Это реальный «Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по математике». На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 4 часа (240 минут). Работа состоит из 2 частей, включающих 18 заданий. Часть 1 включает 12 заданий с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Часть 2 состоит из 6 заданий, которые требуют развернутого ответа. При выполнении заданий с развернутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов №2 должно быть записано полное обоснованное решение задачи и ответ. Максимальное количество баллов — 30. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. Будьте честны с собой! Как вы усвоили материал школьной программы? Если вы не набрали максимального количества баллов, то...
2. **Что делать?** Весь материал пособия разделен на 100 занятий. Тестовые задания упорядочены в соответствии с «Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по математике. На выполнение заданий каждого занятия вы потратите не более 30 минут.
3. **Будьте внимательны**. Прочитайте задание и постарайтесь понять его смысл. Продумайте ход выполнения задания (решения задачи), вспомните необходимые формулы, теоремы и свойства.
4. **Рассуждаем вместе.** Переверните страницу. Образец решения поможет вам научиться находить правильный ответ, даже если задание вызвало у вас определенные трудности.
5. **Репетируем ЕГЭ.** Представьте себя на экзамене. Пройдите последний тест, подобный тому, который вы будете проходить во время ЕГЭ, в условиях, максимально приближенных к условиям экзамена. Сидя дома, за рабочим столом, представьте себя на экзамене — тогда на ЕГЭ вы будете чувствовать себя как дома.

Верьте в свои силы! Желаем удачи!

Уважаемые родители!

Чем вы можете помочь своему ребенку?

1. **Организовать будущему абитуриенту систематическую и последовательную подготовку к ЕГЭ**. Большинство подростков еще не могут правильно планировать свое время, все откладывают «на потом». От правильного планирования занятий во многом зависит результат всей подготовки. Повторить 100 тем за 100 дней легче, чем весь материал за несколько дней до экзамена.
2. **Создать благоприятную психологическую обстановку дома**. Даже для самого ответственного ученика экзамен — это испытание, стресс. «Домашняя психотерапия» — это помощь любящих и заботливых близких людей, родителей, которые проверят, напомнят, убедят, уберегут от бессонных ночей накануне экзамена, успокоят и поддержат.
3. **Быть рядом**. Мы не призываем родителей учить вместе с ребенком теоретический материал и выполнять задания. Это первое «взрослое» испытание для ребенка, а не для его родителей! Принимайте участие в делах вашего ребенка, интересуйтесь его душевным состоянием, настроением. Стараясь помочь, вы дадите своим детям уроки любви, сочувствия, взаимопомощи, научите спокойно и уверенно преодолевать трудности.

Желаем вам удачи и терпения!

Уважаемые коллеги-учителя!

Бóльшая часть заданий нашего пособия взята с официального сайта ФИПИ (открытый сегмент ФБТЗ) (задания, отмеченные знаком «*», написаны авторами-составителями пособия И. В. Третьяк, Т. М. Виноградовой) и упорядочены в соответствии с «Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по математике». Каждому разделу и элементу содержания, проверяемых на ЕГЭ, соответствует несколько типов заданий (кстати, их можно использовать как раздаточный материал при проведении самостоятельных работ). Два тренировочных теста помогут каждому учащемуся определить свой уровень подготовки.

Конечно, ЕГЭ не требует специальной подготовки по предмету — готовиться нужно к самой форме проведения экзамена. Но при этом необходимы обобщение и систематизация изученного материала. Особое внимание следует обратить на пробелы в знаниях учащегося, допущенные при изучении школьной программы, и устранить их. Надеемся, что наше пособие будет полезно вам в вашей ежедневной работе.

Желаем творческих успехов!

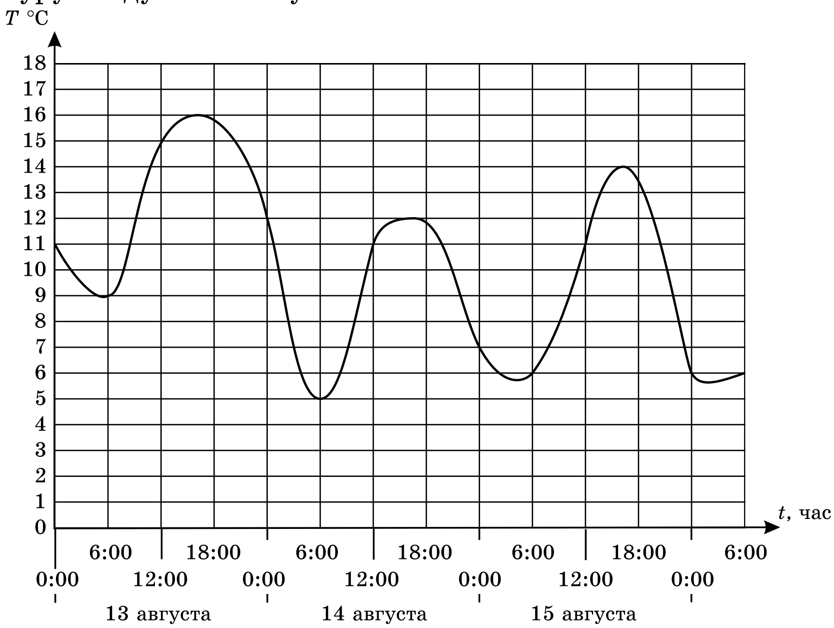
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ № 1[1]

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

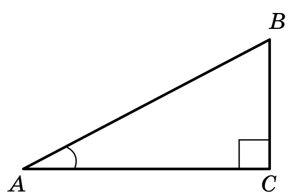
B1. Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

B2. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



B3. Найдите корень уравнения $3^{x-2} = 27$.

B4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5$, $\cos \angle A = 0{,}8$. Найдите BC.



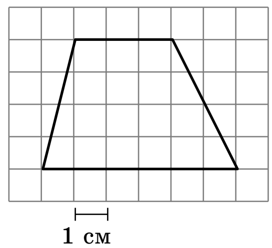
---

[1] Тренировочный тест № 1 является демонстрационным вариантом КИМ ЕГЭ 2011 г. (*www.fipi.ru*).

B5. Строительная фирма планирует купить 70 м^3 пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

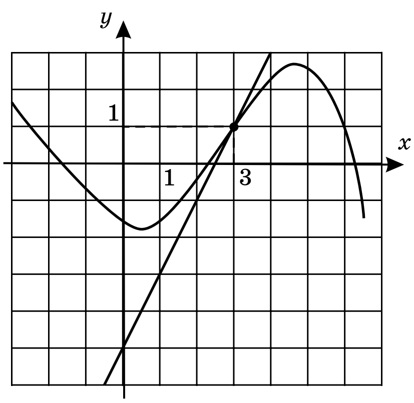
Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб. за весь заказ)	Дополнительные условия доставки
1	2600	10000	
2	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная
3	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная

B6. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7. Найдите значение выражения $\log_2 200 + \log_2 \frac{1}{25}$.

B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.



B9. Объем первого цилиндра равен 12 мм. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

B10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

B10

B11. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$$

B11

B12. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

B12

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Решите уравнение $\dfrac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

C2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

C3. Решите неравенство $\log_{x+3}(9 - x^2) - \dfrac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \geqslant 2$.

C4. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\dfrac{b}{a}$.

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой **ЧЕРНЫМИ** чернилами **ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ** по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , - À Â Ä Ô Ö È É Ê Ë Î Ï Ù Û Ü ß

Регион | Код предмета | Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение вариантов в задании
и бланке ответов подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка.

Резерв 5

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Номера заданий типа **А** с выбором ответа из предложенных вариантов

Образец написания метки ☒ **ЗАПРЕЩЕНЫ** исправления в области ответов
Будьте аккуратны. Случайный штрих внутри квадрата может быть воспринят как метка

Номера вариантов ответа: 1, 2, 3, 4

A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10 A11 A12 A13 A14 A15 A16 A17 A18 A19 A20 A21 A22 A23 A24 A25 A26 A27 A28 A29 A30

A31 A32 A33 A34 A35 A36 A37 A38 A39 A40 A41 A42 A43 A44 A45 A46 A47 A48 A49 A50 A51 A52 A53 A54 A55 A56 A57 A58 A59 A60

Замена ошибочных ответов на задания типа **А**

1 2 3 4

А
А
А
А

Резерв - 6

Резерв - 7

Результаты выполнения заданий типа **В** с ответом в краткой форме

B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10

B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 B19 B20

Замена ошибочных ответов на задания типа **В**

В -
В -
В -

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №2

Регион | Код предмета | Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №2

Регион | Код предмета | Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №2

Регион	Код предмета	Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **C1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Ответы к тренировочному тесту № 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
B1	5	B7	3
B2	14	B8	2
B3	5	B9	9
B4	3	B10	2,4
B5	192000	B11	1
B6	18	B12	20

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\arccos\frac{2}{3}+2\pi n,\ n\in Z$
C2	30°
C3	–1
C4	1 или 7
C5	$a=4$
C6	$a=2,\ b=5$

5 **B1**

B1. После повышения на 20 % билет будет стоить:

$$15\cdot 1{,}2=18 \text{ руб. } \frac{100}{18}=5{,}55\,.$$

14 **B2**

B2. Из графика видно, что 15 августа наибольшая температура была 14 °С.

5 **B3**

B3. $3^{x-2}=27$, $3^{x-2}=3^3$, $x-2=3$, $x=3+2=5$.

3 **B4**

B4. $\cos\angle A=\frac{AC}{AB}$. $AC=AB\cdot\cos\angle A=5\cdot 0{,}8=4$. По теореме Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2$.

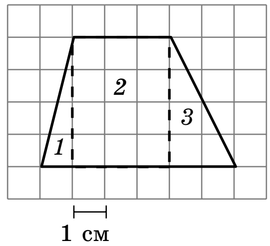
Отсюда $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$.

192000 **B5**

B5. Вычислим стоимость каждой покупки с доставкой.
А: $2600\cdot 70=182\,000$ руб., доставка — $10\,000$ руб., всего в сумме: $182\,000+10\,000=192\,000$.
Б: $2800\cdot 70=196\,000$ руб., $196\,000>150\,000$ — доставка бесплатная.
В: $2700\cdot 70=189\,000$ руб., $189\,000<200\,000$, доставка — 8000 руб., всего в сумме: $196\,000+8\,000=197\,000$.
Самая дешевая покупка в случае А.

B6. Площадь одной клетки 1 см^2. Разделим нашу фигуру на три. Вспомним, что диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника. Тогда площадь треугольника *1*: $S_1 = 4 : 2 = 2$ см^2, площадь треугольника *3*: $S_3 = 8 : 2 = 4$ см^2. Площадь прямоугольника *2*: $S_2 = 12$ см^2. Суммируем площади всех фигур:

$$S = 2 + 12 + 4 = 18 \text{ см}^2.$$



18 **B6**

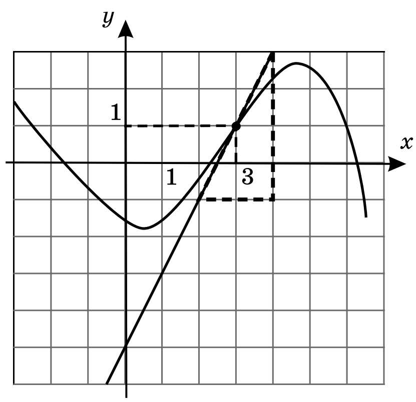
B7. Воспользуемся свойством логарифма произведения $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$. Преобразуем наше выражение:

$$\log_2 200 + \log_2 \frac{1}{25} = \log_2\left(200 \cdot \frac{1}{25}\right) = \log_2 8.$$

$$\log_2 8 = x,\ 2^x = 8 = 2^3,\ x = 3.$$

3 **B7**

B8. Геометрический смысл производной функции — это тангенс угла наклона касательной к графику в заданной точке. Вычислив тангенс касательной в точке $x = 3$ к графику, мы найдем значение производной в этой точке.



Построим прямоугольный треугольник так, чтобы его гипотенуза лежала на касательной. Получился прямоугольный треугольник с катетами 2 и 4. Тангенс угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилегающему. Получаем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{2} = 2$.

2 **B8**

B9. Объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$. Найдем отношение двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 H}{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 (3H)} = \frac{4}{3}. \text{ Отсюда } V_2 = \frac{V_1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9.$$

9 **B9**

B10. Условию задачи соответствует неравенство: $-5t^2 + 18t \geqslant 9$. Решим это неравенство. $-5t^2 + 18t - 9 \geqslant 0$, $5t^2 - 18t + 9 \leqslant 0$.

$$D = 18^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 18 \cdot 18 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 = 18 \cdot 18 - 10 \cdot 18 =$$
$$= 18 \cdot (18 - 10) = 18 \cdot 8 = 144.$$

2,4 **B10**

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{18 \pm 12}{10}.$$

$$x_1 = \frac{18-12}{10} = 0,6 \text{ с}, \; x_2 = \frac{18+12}{10} = 3 \text{ с}.$$

Таким образом, мы получили, что начиная с момента времени $t_1 = 0,6$ с и до момента времени $t_1 = 3$ с камень находился на высоте не менее 9 с. Всего времени он находился на такой высоте: $t_2 - t_1 = 3 - 0,6 = 2,4$ с.

1	B11

B11. Найдем значения функции на концах интервала.

При $x = 0$ $y = 2\cos 0 + \sqrt{3} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 0,15$. При $x = \frac{\pi}{2}$ $y = 2\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = 2 \cdot 0 + \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} =$

$= \frac{3\sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \approx 0,89$.

Определим, есть ли точки максимума на интервале. Найдем производную функцию: $y' = -2\sin x + \sqrt{3}$. Приравняв производную к нулю, найдем точку экстремума: $-2\sin x + \sqrt{3} = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. В нашем интервале лежит только одна точка $x = \frac{\pi}{3}$. При переходе через эту точку производная функции меняет знак с плюса на минус, поэтому это точка максимума. Значение функции в этой точке равно: $y = 2\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Наибольшим значением функции на заданном интервале является ее значение в точке максимума.

20	B12

B12. Пусть за один день первый рабочий делает x ед. работы. Составим таблицу для решения задачи:

	За 1 день	Кол-во дней	Кол-во работы
1-й рабочий	x	2	$2x$
2-й рабочий	$\frac{2x}{3}$	3	$2x$
1-й и 2-й рабочие вместе	$\left(1+\frac{2}{3}\right)x = \frac{5}{3}x$	12	$12 \cdot \frac{5}{3}x = 4 \cdot 5x = 20x$

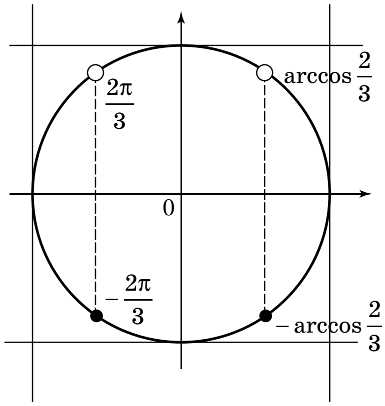
Таким образом, за 12 дней совместной работы 2 рабочих сделали 20 ед. работы 1-го рабочего. То есть сам он сделал бы такую работу за 20 дней.

С1. *Решение*:

Критерии проверки решения:

Уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} 6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0, \\ -\sin x > 0. \end{cases}$$

Из неравенства получаем, что $\sin x < 0$.
В уравнении сделаем замену $\cos x = t$ и решим уравнение $6t^2 - t - 2 = 0$. $t = -\dfrac{1}{2}$ или $t = \dfrac{2}{3}$.



1 балл.
Верно найдены нули числителя, но или не произведен отбор найденных решений, или допущены ошибки в отборе

Равенствам $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ и $\cos x = \dfrac{2}{3}$ на тригонометрической окружности соответствуют четыре точки (см. рисунок). Две из них, находящиеся в верхней полуплоскости, не удовлетворяют условию $\sin x < 0$.

Получаем решения: $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = -\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

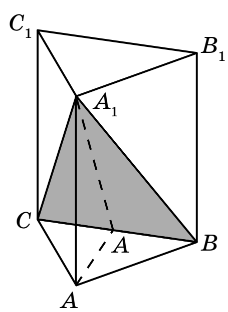
Ответ: $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2 балла.
Обоснованно получен верный ответ

С2. *Решение*:

Критерии проверки решения:

Обозначим H середину ребра BC (см. рисунок). Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC — равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны ВС. Следовательно, $\angle A_1HA$ — линейный угол двугранного угла с гранями BCA и BCA_1.

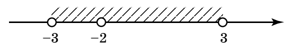


1 балл.
Способ нахождения искомого угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено

Из треугольника A_1AB найдем: $AA_1 = 1$.
Из треугольника AHB найдем: $AH = \sqrt{3}$.
Из треугольника HAA_1 найдем: $tg\angle A_1HA = \dfrac{AA_1}{AH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Искомый угол равен $30°$.
Ответ: 30.

2 балла.
Обоснованно получен верный ответ

С3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верной системе рациональных неравенств	Преобразуем неравенство: $\log_{x+3}\left((3-x)(3+x)\right)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}\left\lvert x-3\right\rvert \geqslant 2$. Найдем, при каких значениях x левая часть неравенства имеет смысл: $\begin{cases} 9-x^2>0, \\ x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ x-3\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (3-x)(3+x)>0, \\ x>-3, \\ x\neq 2, \\ x\neq 3; \end{cases}$ 
2 балла. Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений *x*	Получаем: $-3<x<-2$ или $-2<x<3$. Значит, $\lvert x-3\rvert=3-x$ при всех допустимых значениях x. Поэтому $\log_{x+3}(3-x)+\log_{x+3}(3+x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)\geqslant 2$; $\log_{x+3}(3-x)+1-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)\geqslant 2$. Сделаем замену $\log_{x+3}(3-x)=y$. Получаем $y-\frac{1}{4}y^2\geqslant 1$; $y^2-4y+4\leqslant 0$; $y=2$. Таким образом, $\log_{x+3}(3-x)=2$, откуда $(x+3)^2=3-x$; $x^2+7x+6=0$.
3 балла. Обоснованно получен правильный ответ	Корни уравнения: -6 и -1. Условию $-3<x<-2$ или $-2<x<3$ удовлетворяет только $x=-1$. *Ответ*: -1.

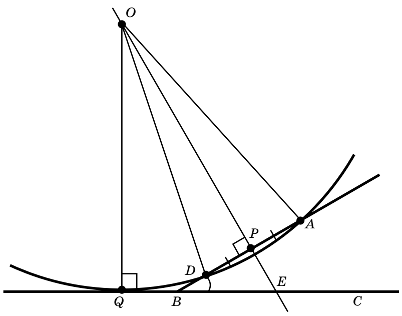
С4.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки	Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AD. Обозначим P середину отрезка AD, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC, E — точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой BC (см. рисунок *а*). Из условия касания окружности и прямой BC следует, что отрезки OA, OD и OQ равны радиусу R окружности. Заметим, что точка O не может лежать по ту же сторону от прямой AB, что и точка E, так как в этом случае расстояние от точки O до прямой BC меньше, чем расстояние от нее до точки A.
2 балла. Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины	Из прямоугольного треугольника BPE с катетом $BP=2$ и $\angle B=30^\circ$ находим, что $PE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Так как $OA=R$ и $AP=1$, получаем: $OP=\sqrt{R^2-1}$ и, следовательно, $OE=\sqrt{R^2-1}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Из прямоугольного треугольника OQE, в котором $\angle E = 60°$, находим: $R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} + 1$.

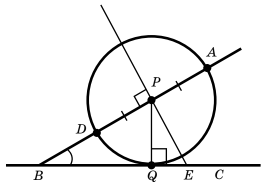
В результате получаем уравнение для R: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} = R - 1$.

Возведем в квадрат обе части этого уравнения и приведем подобные члены. Получим уравнение $R^2 - 8R + 7 = 0$, решая которое находим два корня $R_1 = 1$, $R_2 = 7$.



а

Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рисунок *б*).



б

Ответ: 1 или 7.

3 балла.
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен правильный ответ

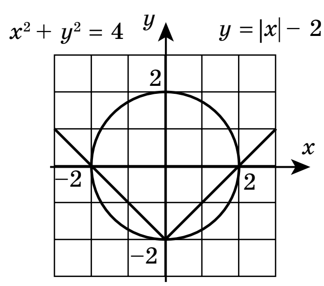
C5. *Решение*:

Критерии проверки решения:

Пусть система имеет решение (x; y). Если $x \neq 0$, то система имеет второе решение ($-x$; y). Значит, решение может быть единственным только при $x = 0$.
Подставим $x = 0$ в первое уравнение: $y = a - 2$. Пара (0; $a - 2$) должна удовлетворять второму уравнению: $(a-2)^2 = 4$, откуда $a = 0$ или $a = 4$.

1 балл.
Получены только необходимые условия на значения *a*

Для каждого из двух найденных значений параметра нужно проверить, действительно ли данная система имеет единственное решение.
Первый случай: $a = 0$. Система принимает вид $\begin{cases} y = |x| - 2, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$



Графиком функции $y = |x| - 2$ является угол, который имеет с окружностью $x^2 + y^2 = 1$ три общие точки (см. рисунок). Значит, при $a = 0$ система имеет три решения.
Второй случай: $a = 2$. Система принимает вид

$$\begin{cases} y = 4x^4 + |x| + 2, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что при $x \neq 0$ $y > 2$, а из второго уравнения при $x \neq 0$ получаем, что $|y| < 2$.

2 балла.
Верно получены необходимые условия на значения *a*, однако в проверке достаточных условий допущены ошибки

3 балла. Получен правильный ответ. Решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности	Следовательно, при $x \neq 0$ система решений не имеет. Значит, при $a = 4$ есть только одно решение: $x = 0$, $y = 2$.
4 балла. Обоснованно получен правильный ответ	*Ответ*: $a = 4$.

С6.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Составлено, но не решено верное уравнение в натуральных числах, верный ответ приведен	Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство $\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}$, поэтому $10^n(b - a^2) = ab$.
2 балла. Составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сделаны существенные выводы для нахождения искомой пары чисел, уравнение до конца не решено, но верный ответ приведен	Из этого уравнения следует, что $b > a^2 \geqslant a$. Так как числа a и b взаимно простые, числа $b - a^2$ и ab тоже взаимно простые. (Действительно, пусть p — общий простой делитель этих чисел. Тогда если p — делитель a, то p будет делителем b. Если же p — делитель b, то p будет делителем a^2, значит, p — делитель a. Противоречие.)
3 балла. Получена система необходимых и достаточных условий на пару искомых чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность	Поэтому $b - a^2 = 1$ и, следовательно, $ab = 10^n$. Последнее равенство при взаимно простых a и b возможно только в двух случаях: 1) $b = 10^n$, $a = 1$, но в этом случае не выполняется равенство $b - a^2 = 1$. 2) $b = 5^n$, $a = 2^n$. В этом случае равенство $b - a^2 = 1$ принимает вид $5^n - 4^n = 1$, откуда $\left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Функция $f(n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ возрастает, а функция $g(n) = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ убывает. Поэтому уравнение $f(n) = g(n)$ имеет не более одного корня, и так как $f(1) = g(1)$, единственным корнем уравнения является $n = 1$.
4 балла. Обоснованно получен правильный ответ	*Ответ*: $a = 2$, $b = 5$. Возможны другие формы записи ответа. Например: $(2;\ 5)$ или $\frac{5}{2} = 2,5$ или $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$

День 1

АЛГЕБРА

1.1. Числа, корни и степени

1.1.1. Целые числа

1.1.2. Степень с натуральным показателем

1. Сырок стоит 7 рублей 20 копеек. Какое наибольшее количество сырков можно купить на 60 рублей?

1

2. На день рождения полагается дарить букет из нечетного числа цветов. Розы стоят 80 рублей за штуку. У Вани есть 300 рублей. Из какого наибольшего числа роз он может купить букет Маше на день рождения?

2

3. Найдите значение выражения $3^8 \cdot 4^{11} : 12^7$.

3

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2}$.

4

5. Сырок стоит 6 рублей 60 копеек. Какое наибольшее количество сырков можно купить на 80 рублей?

5

6. Найдите значение выражения $49^9 \cdot 3^{12} : 147^9$.

6

Ответы:

1. 7 рублей 20 копеек = 7,2 рубля.

$$60 : 7,2 = \frac{60}{7,2} = \frac{600}{72} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \ (\text{шт.}).$$

Значит, на 60 рублей можно купить не больше 8 сырков по 7 рублей 20 копеек.
Ответ: 8.

2. $$\frac{30\cancel{0}}{8\cancel{0}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \ (\text{шт.}).$$

Значит, 3 — наибольшее из искомых чисел для букета роз.
Ответ: 3.

3. $$3^8 \cdot 4^{11} : 12^7 = 3^8 \cdot \left(2^2\right)^{11} : \left(3 \cdot 2^2\right)^7 = \frac{3^8 \cdot 2^{2\cdot 11}}{3^7 \cdot 2^{2\cdot 7}} = \frac{3^{\cancel{8}} \cdot 2^{\cancel{22}^{8}}}{3^{\cancel{7}} \cdot 2^{\cancel{14}}} =$$

$$= 3 \cdot 2^8 = 3 \cdot 256 = 768.$$

Ответ: 768.

4. $$\frac{\left(5a^2\right)^3 \cdot \left(6b\right)^2}{\left(30a^3b\right)^2} = \frac{5^3\left(a^2\right)^3 \cdot 6^2 \cdot b^2}{30^2\left(a^3\right)^2 b^2} = \frac{5 \cdot a^6 \cdot 5^2 \cdot 6^2}{30^2 \cdot a^6} = \frac{5 \cdot (5 \cdot 6)^2}{30^2}$$

$$= \frac{5 \cdot \cancel{30^2}}{\cancel{30^2}} = 5.$$

Ответ: 5.

5. *Ответ*: 12.

6. *Ответ*: 27.

Основные свойства степеней

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;
4. $(ab)^n = a^n b^n$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Таблица степеней чисел 2 и 3

n	2	3
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	6561
9	512	19683
10	1024	59049

День 2

1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа

1. Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 700 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

1

2. Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 800 рублей после повышения цены на 25 %?

2

3. Шариковая ручка стоит 20 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 25 %?

3

4. Флакон шампуня стоит 120 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 700 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

4

Ответы:

1. Найдем стоимость одного флакона шампуня со скидкой 35 %:

$$160 : 100 \cdot 35 = 56 \text{ (руб.) — скидка;}$$
$$160 - 56 = 104 \text{ (руб.).}$$

Узнаем, сколько шампуня можно купить на 700 рублей во время распродажи.

$$700 : 104 = 6\frac{76}{104} = 6\frac{19}{26} \text{ (шт.).}$$

Значит, наибольшее число флаконов равняется 6.
Ответ: 6.

2. Узнаем, на сколько подорожала ручка:

$$40 : 100 \cdot 25 = 10 \text{ (руб.).}$$

Найдем цену ручки после подорожания:

$$40 + 10 = 50 \text{ (руб.).}$$

Определим количество ручек, которые можно купить на 800 рублей после подорожания:

$$\frac{80\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 16 \text{ (шт).}$$

Ответ: 16.

3. *Ответ*: 36.

4. *Ответ*: 8.

Преобразование процентов

Для того чтобы записать проценты десятичной дробью или натуральным числом, нужно число, которое стоит перед знаком «%», разделить на 100:

$27\% = 27 : 100 = 0{,}27;$

$200\% = 200 : 100 = 2.$

Для того чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100 %:

$0{,}15 = 0{,}15 \cdot 100\% = 15\%;$

$1{,}7 = 1{,}7 \cdot 100\% = 170\%.$

Основные задачи на проценты

Задача	Пример
Нахождение процента от числа	25 % от числа 300 равно $\frac{25 \cdot 300}{100} = 75$
Нахождение числа по данному проценту	Если 25 % какого-нибудь числа равно 30, то число равно $\frac{100 \cdot 30}{25} = 120$
Нахождение процентного отношения	Число 15 составляет $\frac{15}{75} \cdot 100\% = 20\%$ от числа 75
Увеличение на $p\%$	Если число 200 увеличить на 30 %, то получим число: $200(1+0{,}3) = 200 \cdot 1{,}3 = 260$
Уменьшение на $p\%$	Если число 120 уменьшить на 30 %, то получим число: $120 \cdot (1-0{,}3) = 120 \cdot 0{,}7 = 84$
Формула сложных процентов	Если начальный вклад 1000 и годовой процент 20, то в конце 3-го года вклад составит: $1000 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)^3 = 1728$

День 3

1.1.4. Степень с целым показателем

1. Найдите значение выражения $\dfrac{x^5 \cdot x^7}{x^{11}}$ при $x = 4$.

1

2. Найдите значение выражения $\dfrac{x^8 \cdot x^6}{x^{16}}$ при $x = -4$.

2

3*. Найдите значение выражения $\dfrac{(0,04)^7 \cdot 5^6}{(-125)^{-5} \cdot (-5)^3}$.

3

4*. Найдите значение выражения $12a^{-6} \cdot \left(-4a^{-3}y^7\right)^{-2}$ при $a = 4728$, $y = -1$.

4

5. Найдите значение выражения $\dfrac{x^9 \cdot x^5}{x^{10}}$ при $x = 3$.

5

6*. Найдите значение выражения $\dfrac{18^6 \cdot 2^{-8}}{36^{-3} \cdot 9^9}$.

6

* Здесь и далее, задания, отмеченные звездочкой, составленны Третьяк И. В., Виноградовой Т. М.

Ответы:

1. $$\frac{x^5\cdot x^7}{x^{11}}=\frac{x^{5+7}}{x^{11}}=\frac{x^{12}}{x^{11}}=x^{12-11}=x^1=x;$$

при $x=4$ $\quad\frac{x^5\cdot x^7}{x^{11}}=4.$

Ответ: 4.

2. $$\frac{x^8\cdot x^6}{x^{16}}=\frac{x^{8+6}}{x^{16}}=\frac{x^{14}}{x^{16}}=x^{14-16}=x^{-2}=\frac{1}{x^2};$$

при $x=-4$ $\quad\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-4)^2}=\frac{1}{16}=0,0625.$

Ответ: 0,0625.

3. $$\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^7\cdot 5^6}{\left((-5)^3\right)^{-5}\cdot(-5)^3}=\frac{\left(\frac{1}{5^2}\right)^7\cdot 5^6}{(-5)^{-15}\cdot(-5)^3}=\frac{\left(5^{-2}\right)^7\cdot 5^6}{(-5)^{-15+3}}=\frac{5^{-14}\cdot 5^6}{(-5)^{-12}}=$$
$$=\frac{5^{-14+6}}{\left(-\frac{1}{5}\right)^{12}}=\frac{5^{-8}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{12}}=\frac{5^{-8}\cdot 5^{12}}{1^{12}}=5^{-8+12}=5^4=625.$$

Ответ: 625.

4. $$12a^{-6}(-4)^{-2}\left(a^{-3}\right)^{-2}\left(y^{-7}\right)^{-2}=12a^{-6}\left(-\frac{1}{4}\right)^2a^6y^{14}=$$
$$=\frac{{}^3\cancel{12}\cdot 1}{1\cdot\cancel{16}_4}a^{-6}a^6y^{14}=\frac{3}{4}a^0y^{14}=0,75y^{14};$$

при $y=-1$ $\quad 0,75y^{14}=0,75\cdot(-1)^{14}=0,75\cdot 1=0,75.$

Ответ: 0,75.

5. *Ответ*: 81.

6. *Ответ*: 16.

Основные свойства степеней

$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$

$a^m:a^n=a^{m-n};$

$(a^m)^n=a^{mn};$

$(ab)^n=a^nb^n;$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n.$

День 4

1.1.5. Корень степени $n>1$ и его свойства

1*. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

1

2. Найдите $h(5+x)+h(5-x)$, если $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-10}$.

2

3*. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[10]{3+2\sqrt{2}}$.

3

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ при $m=64$.

4

5*. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

5

Ответы:

1.

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt6}\right)^2-2\sqrt{5-2\sqrt6}\sqrt{5+2\sqrt6}+\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^2=$$

$$=\left|5-2\sqrt6\right|-2\sqrt{(5-2\sqrt6)(5+2\sqrt6)}+\left|5+2\sqrt6\right|=$$

$$=5-\cancel{2\sqrt6}-2\sqrt{5^2-\left(2\sqrt6\right)^2}+5+\cancel{2\sqrt6}=10-2\sqrt{25-4\cdot6}=$$

$$=10-2\sqrt{25-24}=10-2\sqrt1=10-2\cdot1=8.$$

Ответ: 8.

2.

$$h\left(5+x\right)+h\left(5-x\right)=$$
$$=\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5+x-10}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{5-x-10}=$$
$$=\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{x-5}+\sqrt[3]{-\left(x-5\right)}+\sqrt[3]{-x-5}=$$
$$=\cancel{\sqrt[3]{5+x}}+\cancel{\sqrt[3]{x-5}}-\cancel{\sqrt[3]{x-5}}-\cancel{\sqrt[3]{x+5}}=0.$$

Ответ: 0.

3.

$$\sqrt[5]{1-\sqrt2}\cdot\sqrt[10]{2+2\sqrt2+1}=\sqrt[5]{1-\sqrt2}\cdot\sqrt[10]{\left(\sqrt2\right)^2+2\sqrt2+1}=$$
$$=\sqrt[5]{1-\sqrt2}\cdot\sqrt[10]{\left(\sqrt2+1\right)^2}=\sqrt[5]{1-\sqrt2}\cdot\sqrt[5]{1+\sqrt2}=$$
$$=\sqrt[5]{\left(1-\sqrt2\right)\left(1+\sqrt2\right)}=\sqrt[5]{1^2-\left(\sqrt2\right)^2}=\sqrt[5]{1-2}=\sqrt[5]{-1}=-1.$$

Ответ: −1.

4. *Ответ*: 4.

5. *Ответ*: 1.

Формулы сокращенного умножения

$(a+b)\,(a-b)=$
$=a^2-b^2;$

$(a\pm b)^2=$
$=a^2\pm 2ab+b^2;$

$(a\pm b)\,(a^2\mp ab+b^2)=$
$=a^3\pm b^3;$

$(a\pm b)^3=$
$=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$(a+b+c)^2=$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+$
$+2ac+2bc.$

Основные свойства арифметических корней *n*-й степени
($n\geqslant 2,\ n\in N$)

1. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, если $a\geqslant 0$;
   $\left(\sqrt[2n-1]{a}\right)^{2n-1}=a$, где $a\in R$;

2. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|=\begin{cases}a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0;\end{cases}$
   $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}=a$, где $a\in R$;

3. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$,
   $a\geqslant 0,\ m\in Z,\ k\in N$;

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$,
   $k\in N,\ k\geqslant 2,\ a\geqslant 0$;

5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$,
   $k\in N,\ k\geqslant 2,\ a\geqslant 0$;

6. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$,
   где $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$;

7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,
   где $a\geqslant 0,\ b>0$.

День 5

1.1.6. Степень с рациональным показателем и ее свойства
1.1.7. Свойства степени с действительным показателем

1. Найдите значение выражения $\dfrac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$.

	1

2. Найдите значение выражения $4^{\sqrt{6}+7} \cdot 4^{-5-\sqrt{6}}$.

	2

3. Найдите значение выражения $\dfrac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}}$ при $n > 0$.

	3

4. Найдите значение выражения $35^{-4,7} \cdot 7^{5,7} : 5^{-3,7}$.

	4

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3a}\right)^2 \sqrt[5]{a^3}}{a^{2,6}}$ при $a > 0$.

	5

6. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

	6

7. Найдите значение выражения $\dfrac{(9b)^{1,5} \cdot b^{2,7}}{b^{4,2}}$ при $b > 0$.

	7

Ответы:

1. $$\frac{3^{6,5}}{\left(3^2\right)^{2,25}} = \frac{3^{6,5}}{3^{2\cdot 2,25}} = \frac{3^{6,5}}{3^{4,5}} = 3^{6,5-4,5} = 3^2 = 9.$$

Ответ: 9.

2. $$4^{\sqrt{6}+7+(-5-\sqrt{6})} = 4^{\cancel{\sqrt{6}}+7-5-\cancel{\sqrt{6}}} = 4^2 = 16.$$

Ответ: 16.

3. $$\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}} = \frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1+3}{12}}} = \frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{4}{12}}} = \frac{6\cancel{n^{\frac{1}{3}}}}{\cancel{n^{\frac{1}{3}}}} = 6.$$

Ответ: 6.

4. $$(5\cdot 7)^{-4,7}\cdot 7^{5,7} : 5^{-3,7} = 5^{-4,7}\cdot 7^{-4,7}\cdot 7^{5,7} : 5^{-3,7} =$$
$$= 5^{-4,7}\cdot 7^{-4,7+5,7} : 5^{-3,7} = 5^{-4,7-(-3,7)}\cdot 7^{1} =$$
$$= 5^{-4,7+3,7}\cdot 7 = 5^{-1}\cdot 7 = \frac{1}{5}\cdot 7 = 0,2\cdot 7 = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

5. $$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 a^2\cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{2,6}} = \frac{3\cdot a^2\cdot a^{0,6}}{a^{2,6}} = \frac{3a^{2,6}}{a^{2,6}} = 3.$$

Ответ: 3.

6. *Ответ*: 7.

7. *Ответ*: 27.

Основные свойства степеней

$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

День 6

1.2. Основы тригонометрии

1.2.1. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла

1*. Найдите синус наименьшего угла египетского треугольника (стороны 3,4,5).

1

2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 25$, $BC = 24$. Найдите $\cos A$.

2

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AC = BC)$ основание $AB = 30$, $\cos A = \dfrac{5}{13}$. Найдите высоту CH.

3

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 25$, $BC = 7$. Найдите $\cos A$.

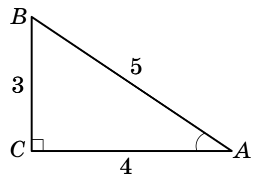
4

5. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 72$, $\cos A = \dfrac{12}{13}$. Найдите высоту CH.

5

Ответы:

1. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$.
Поскольку в треугольнике наименьший угол лежит против меньшей стороны, то угол A — наименьший.

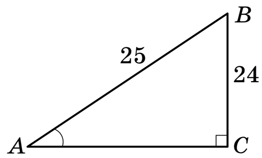


$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

2. По определению $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$,

по теореме Пифагора найдем сторону AC:



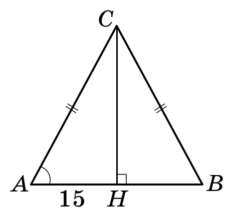
$$AC^2 = AB^2 - BC^2;$$

$$AC = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25-24)(25+24)} = \sqrt{49} = 7.$$

Поэтому $\cos A = \dfrac{7}{25} = \dfrac{7 \cdot 4}{25 \cdot 4} = 0,28$.

Ответ: 0,28.

3. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой. Поэтому $AH = HB = 15$.



$$\cos A = \frac{AH}{AC}; \quad \frac{5}{13} = \frac{15}{AC};$$

$$AC = \frac{13 \cdot 15}{5} = 39;$$

по теореме Пифагора из $\triangle CHA$ ($\angle CHA = 90^\circ$)

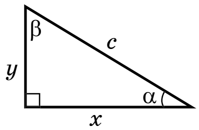
$$CH^2 = AC^2 - AH^2; \quad CH = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

Ответ: 36.

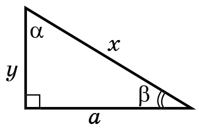
4. *Ответ*: 0,96.

5. *Ответ*: 15.

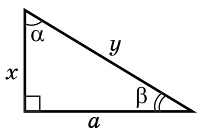
Прямоугольные треугольники



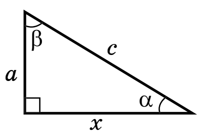
$\beta = 90^\circ - \alpha$;
$x = c \cdot \cos\alpha$;
$y = c \cdot \sin\alpha$.



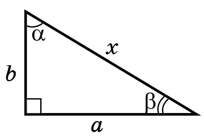
$\alpha = 90^\circ - \beta$;
$y = a \cdot \text{tg} \cdot \alpha$;
$x = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.



$\beta = 90^\circ - \alpha$;
$x = a \cdot \text{ctg}\,\alpha$;
$y = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.



$x = \sqrt{c^2 - a^2}$;
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$.



$x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\text{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a}$.

День 7

1.2.2. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла

1*. Найдите градусную меру угла A, если

$$A = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{15}.$$

1

2. Найдите значение выражения $24\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2

3*. Найдите $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0,8$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

3

4. Найдите значение выражения $36\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

4

5*. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

5

Ответы:

1. Заметим, что π рад $= 180^\circ$, поэтому

$$\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{15}=\frac{180^\circ}{18}+\frac{180^\circ}{10}+\frac{180^\circ}{12}+\frac{180^\circ}{15}=$$
$$=10^\circ+18^\circ+15^\circ+12^\circ=55^\circ.$$

Ответ: 55.

2. $$24\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-24\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=-24\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-12.$$

Ответ: –12.

3. $$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha.$$

$\sin\alpha=0,8$, поэтому, используя формулу $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, получим $\cos^2\alpha=1-(0,8)^2=1-0,64=0,36$. Учитывая, что $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\cos\alpha=-\sqrt{0,36}=-0,6$.

Ответ: $-0{,}6$.

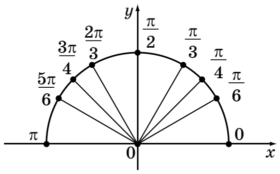
4. *Ответ*: 36.

5. *Ответ*: 3.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

t, рад		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t, град		0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Значения	$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
	$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
	$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
	$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

Радианное измерение углов



π радиан $=180^\circ$,

1 радиан $=\dfrac{180^\circ}{\pi}\approx$

$\approx 57^\circ17'45''$,

$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\approx 0,01745$.

Градусы	Радианы
0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
180°	π

День 8

1.2.4. Основные тригонометрические тождества

1*. Найдите $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1

2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 15$, $BC = 3\sqrt{21}$. Найдите $\cos A$.

2

3*. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\cos A = \frac{5}{13}$, высота $BH = 24$. Найдите периметр треугольника.

3

4*. Найдите значение выражения

$$\frac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{8\cos\alpha + 4\sin\alpha},$$

если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

4

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна BC и равна 11, а $\cos A = \frac{\sqrt{85}}{11}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

5

Ответы:

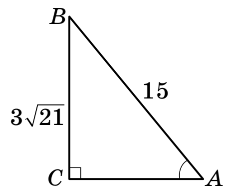
1. Используем формулу $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, отсюда

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{9}{16}}=\frac{1}{\frac{25}{16}}=\frac{16}{25}.$$

Учитывая, что $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}=-0,8.$

Ответ: −0,8.

2. Поскольку для угла A известны противолежащий катет BC и гипотенуза AB, найдем $\sin A$:



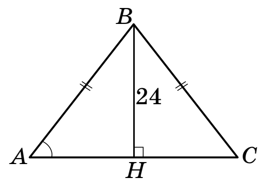
$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3\sqrt{21}}{15}=\frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2=1-\frac{21}{25}=\frac{4}{25}.$$

Учитывая, что угол $A<90^\circ$, $\cos A=\frac{2}{5}=0,4.$

Ответ: 0,4.

3. Рассмотрим $\triangle AHB$, ($\angle AHB=90^\circ$, поскольку BH — высота). $\cos A=\frac{5}{13}$.



Используем формулу

$$1+\operatorname{tg}^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}\quad\text{или}$$

$$\operatorname{tg}^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}-1=\frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2}-1=\frac{169}{25}-1=\frac{144}{25};$$

$\operatorname{tg} A=\frac{12}{5}$ (угол $A<90^\circ$). $\operatorname{tg} A=\frac{BH}{AH}$; $\frac{12}{5}=\frac{24}{AH}$;

$AH=\frac{5\cdot 24}{12}=10.$ $AC=20$, т. к. BH является медианой по теореме Пифагора.

$AB^2=BH^2+AH^2=24^2+10^2=676$; $AB=26.$

$P_{ABC}=26+26+20=72.$

Ответ: 72.

4. *Ответ*: 0,55.

5. *Ответ*: 6.

Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$
$\alpha\in R;$

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$
$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

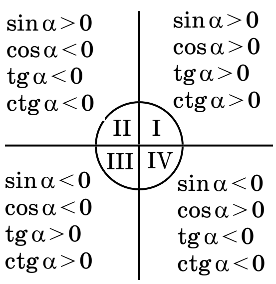
$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,$
$n\in Z;$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$
$\alpha\neq\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;$

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},$
$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha},$
$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z.$

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса



День 9

1.2.5. Формулы приведения

1. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(-300^\circ)$.

	1

2. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.

	2

3. Найдите значение выражения

$5\sin(\alpha-7\pi)-11\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-0,25$.

	3

4. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{31\pi}{4}\right)}$.

	4

5. Найдите $\mathrm{tg}\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=0,4$.

	5

Ответы:

1. $$2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(-300^\circ) = -2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,300^\circ = -2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(270^\circ + 30^\circ) =$$
$$= 2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,30^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6.$$

(Использовали соотношения: $\mathrm{tg}\,(-\alpha) = -\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{tg}\,(270^\circ + \alpha) = -\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Ответ: 6.

2. Заметим, что $29^\circ = 90^\circ - 61^\circ$, поэтому
$$\frac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ} = \frac{5\cos\left(90^\circ - 61^\circ\right)}{\sin 61^\circ} = \frac{5\sin 61^\circ}{\sin 61^\circ} = 5.$$

Ответ: 5.

3. Используя факт, что период функции $\sin x$ равен 2π, выделим в заданном аргументе число, кратное периоду, т. е. 6π и, учитывая соотношение $\sin\left(-\alpha\right) = -\sin\alpha$, получим:
$$\sin(\alpha - 7\pi) = -\sin(7\pi - \alpha) = -\sin(6\pi + \pi - \alpha) = -\sin(\pi - \alpha).$$
Имеем:
$$-5\sin(\alpha - 7\pi) - 11\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$
$$= -5\sin(\pi - \alpha) - 11\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -5\sin\alpha - 11\sin\alpha =$$
$$= -16\sin\alpha = -16\cdot\left(-0,25\right) = 4.$$

Ответ: 4.

4. *Ответ*: –16.

5. *Ответ*: –2,5.

Формулы приведения

Угол t		$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
Функции	$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
	$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
	$\mathrm{tg}\,t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
	$\mathrm{ctg}\,t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

День 10

1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов
1.2.7. Синус и косинус двойного угла

1*. Вычислить: $\dfrac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 13^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 13^\circ}$.

	1

2. Найдите значение выражения $\dfrac{36 \sin 102^\circ \cos 102^\circ}{\sin 204^\circ}$.

	2

3. Найдите $9 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \dfrac{1}{3}$.

	3

4. Найдите значение выражения $\dfrac{24\left(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ\right)}{\cos 34^\circ}$.

	4

5. Найдите значение выражения $\dfrac{10 \sin 6\alpha}{\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0{,}6$.

	5

Ответы:

1. Используем формулу $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg}58^\circ-\operatorname{tg}13^\circ}{1+\operatorname{tg}58^\circ\operatorname{tg}13^\circ}=\operatorname{tg}(58^\circ-13^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1.$$

Ответ: 1.

2. Используем формулу $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$.
Тогда

$$\frac{36\sin102^\circ\cos102^\circ}{\sin204^\circ}=\frac{18\cdot2\sin102^\circ\cos102^\circ}{\sin204^\circ}=$$

$$=\frac{18\cdot\sin204^\circ}{\sin204^\circ}=18.$$

Ответ: 18.

3. Используем формулу

$1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$, или $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

Тогда $9\cos2\alpha=9\left(2\cos^2\alpha-1\right)=9\cdot\left(\dfrac{2}{9}-1\right)=9\cdot\left(-\dfrac{7}{9}\right)=-7.$

Ответ: –7.

4. *Ответ*: –24.

5. *Ответ*: 12.

Формулы сложения

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$

$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\,(}{1\mp\mathrm{t}}$ $\alpha,\ \beta,\ \alpha\pm\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta},\ \alpha,\ \beta,\ \alpha\pm\beta\neq\pi n,\ n\in Z.$

Формулы двойного угла

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$

$\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

День 11

1.3. Логарифмы
1.3.1. Логарифм числа
1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени. Десятичный и натуральный логарифмы. Число *e*

1. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[6]{13}} 13$.

	1

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 18}{2+\log_3 2}$.

	2

3*. Найдите значение выражения $e^{\frac{4}{\log_{\sqrt{2}} e}+\frac{1}{3}\ln 8}$.

	3

4. Найдите значение выражения $5^{3+\log_5 2}$.

	4

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7}+\log_7 0,2$.

	5

Ответы:

Формула перехода к новой основе

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$
$$10^{\lg b} = b.$$

Свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0$,
$\log_a a = 1$,
где $a > 0$, $a \neq 1$.

2. Логарифм произведения.
$\log_a (bc) =$
$= \log_a b + \log_a c$,
где $a > 0$, $a \neq 1$,
$b > 0$, $c > 0$.

3. Логарифм частного.
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$
где $a > 0$, $a \neq 1$,
$b > 0$, $c > 0$.

4. Логарифм степени.
$$\log_a b^p = p \cdot \log_a b,$$
где $b > 0$, $a > 0$,
$a \neq 1$, $p \in R$.

1. Заметим, что $\sqrt[6]{13} = 13^{\frac{1}{6}}$, учитывая формулу

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b,$$

получим

$$\log_{\sqrt[6]{13}} 13 = \log_{13^{\frac{1}{6}}} 13 = 6 \log_{13} 13 = 6 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: 6.

2. Пусть $M = \dfrac{\log_3 18}{2 + \log_3 2}$. Представим число 2 в виде логарифма по основанию 3, т. е. $2 = \log_3 9$, тогда

$$M = \frac{\log_3 18}{\log_3 9 + \log_3 2}.$$

Используем формулу логарифма произведения, т. е. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$, получим

$$M = \frac{\log_3 9 \cdot 2}{\log_3 9 + \log_3 2} = \frac{\log_3 9 + \log_3 2}{\log_3 9 + \log_3 2} = 1.$$

Ответ: 1.

3. Пусть $M = e^{\frac{4}{\log_{\sqrt{2}} e} + \frac{1}{3} \ln 8}$. Используя свойства степени $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ и $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, получим

$$M = \left(e^{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} e}}\right)^4 \cdot \left(e^{\ln 8}\right)^{\frac{1}{3}},$$

учитывая формулы $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ и $a^{\log_a b} = b$, получаем

$$M = \left(e^{\ln \sqrt{2}}\right)^4 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \sqrt[3]{8} = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: 8.

4. *Ответ*: 250.

5. *Ответ*: 0.

День 12

1.4. Преобразование выражений

1.4.1. Преобразование выражений, включающих арифметические операции

1. Найдите значение выражения $2x + y + 6z$, если $4x + y = 5$, $12z + y = 7$.

2. Найдите значение выражения $q(b-2) - q(b+2)$, если $q(b) = 3b$.

3. Найдите $2p(x-7) - p(2x)$, если $p(x) = x - 3$.

4. Найдите значение выражения $5\left(p(2x) - 2p(x+5)\right)$, если $p(x) = x - 10$.

5. Найдите $p(x-7) + p(13-x)$, если $p(x) = 2x + 1$.

Ответы:

Умножение одночлена на многочлен

c	ac
b	ab
	a

$a\,(b+c)=ab+ac.$

Для того чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные одночлены сложить.

$2x(3x^2+2x-3)=$
$=6x^3+4x^2-6x.$

Умножение многочлена на многочлен

d	ad	bd
c	ac	bc
	a	b

$(a+b)\,(c+d)=$
$=ac+ad+bc+bd.$

Для того чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные одночлены сложить.

$(3x-2)\,(2x-3)=$
$=6x^2-\underline{9}x-\underline{4}x+6=$
$=6x^2-13x+6.$

1. $$2x+y+6z=\frac{1}{2}\cdot 2(2x+y+6z)=\frac{1}{2}(4x+2y+12z)=$$
$$=\frac{1}{2}(4x+y+y+12z)=\frac{1}{2}(5+7)=\frac{1}{2}\cdot 12=6.$$

Ответ: 6.

2. По условию $q(b)=3b$, тогда
$$q(b-2)=3(b-2)=3b-6;$$
$$q(b+2)=3(b+2)=3b+6.$$

Следовательно,
$$q(b-2)-q(b+2)=3b-6-(3b+6)=\cancel{3b}-6-\cancel{3b}-6=-12.$$

Ответ: –12.

3. Так как $p(x)=x-3$, то
$$p(x-7)=x-7-3=x-10;$$
$$2p(x-7)=2\cdot(x-10)=2x-20;$$
$$p(2x)=2x-3.$$

Итак,
$$2p(x-7)-p(2x)=2x-20-(2x-3)=\cancel{2x}-20-\cancel{2x}+3=-17.$$

Ответ: –17.

4. *Ответ*: 0.

5. *Ответ*: 14.

День 13

1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

1. Найдите значение выражения $49^2 \cdot 4^3 : 196$. 1

2. Найдите значение выражения $4^8 \cdot 11^{10} : 44^8$. 2

3*. Найдите значение выражения 3

$$\left(5^{-3}+2\right)\left(5^{-3}-2\right)-\left(5^{-3}+3\right)^2.$$

4*. Найдите значение выражения 4

$$\left(\frac{2^{-3}}{2^{-3}-7}-\frac{2\cdot 2^{-3}}{2^{-6}-14\cdot 2^{-3}+49}\right)\cdot\frac{49-2^{-6}}{2^{-3}-9}+\frac{14\cdot 2^{-3}}{2^{3}-7}.$$

5. Найдите значение выражения $4^7 \cdot 49^7 : 196^6$. 5

6. Найдите значение выражения $3^8 \cdot 4^{11} : 12^7$. 6

Ответы:

1. $$\left(7^2\right)^2\cdot\left(2^2\right)^3:(49\cdot4)=7^4\cdot2^6:\left(7^2\cdot2^2\right)=\frac{7^4\cdot2^6}{7^2\cdot2^2}=7^{4-2}\cdot2^{6-2}=$$

$$=7^2\cdot2^4=49\cdot16=784.$$

Ответ: 784.

2. $$\frac{4^8\cdot11^{10}}{(4\cdot11)^8}=\frac{\cancel{4^8}\cdot11^{10}}{\cancel{4^8}\cdot11^8}=11^{10-8}=11^2=121.$$

Ответ: 121.

3. $$\left(5^{-3}\right)^2-2^2-\left(\left(5^{-3}\right)^2+2\cdot3\cdot5^{-3}+3^2\right)=$$

$$=\cancel{5^{-6}}-4-\cancel{5^{-6}}-6\cdot5^{-3}-9=-13-6\cdot\frac{1}{5^3}=-13-\frac{6}{125}=$$

$$=-13-0,048=-13,048.$$

Ответ: –13,048.

4. Пусть $2^{-3}=a$, упростим полученное выражение:

$$\left(\frac{a}{a-7}-\frac{2a}{a^2-14a+7^2}\right)\cdot\frac{49-a^2}{a-9}+\frac{14a}{a-7}=$$

$$=\left(\frac{a}{a-7}-\frac{2a}{(a-7)^2}\right)\cdot\frac{(7-a)(7+a)}{a-9}+\frac{14a}{a-7}=$$

$$=\frac{\left(a(a-7)-2a\right)(7-a)(7+a)}{(7-a)^2(a-9)}+\frac{14a}{a-7}=$$

$$=\frac{\left(a^2-9a\right)(7+a)}{(7-a)(a-9)}+\frac{14a}{a-7}=\frac{a\left(\cancel{a-9}\right)(7+a)}{(7-a)\left(\cancel{a-9}\right)}-\frac{14a}{7-a}=$$

$$=\frac{7a+a^2-14a}{7-a}=\frac{a^2-7a}{7-a}=\frac{a(a-7)}{-(a-7)}=-a.$$

При $a=2^{-3}$ $-a=-2^{-3}=-\frac{1}{2^{-3}}=-\frac{1}{8}=-0,125.$

Ответ: –0,125.

5. *Ответ*: 196.

6. *Ответ*: 768.

Свойства степеней

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

$a^m:a^n=a^{m-n}$;

$(a^m)^n=a^{mn}$;

$(ab)^n=a^nb^n$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Формулы сокращенного умножения

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$;

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$;

$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

День 14

1.4.3. Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени

1. Найдите значение выражения $\dfrac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$ при $a>0$.

2. Найдите $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x)=\sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x|\neq 2$.

3*. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}-\dfrac{11-4\sqrt{7}}{3}$.

4*. Найдите значение выражения $\dfrac{3-8}{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4}-\sqrt[3]{3}$.

5*. Найдите значение выражения $\dfrac{16\sqrt[3]{\sqrt[32]{m}}+5\sqrt[48]{\sqrt{m}}}{7\cdot\sqrt[12]{\sqrt[8]{m}}}$.

6*. Найдите $\dfrac{q(3+x)}{q(3-x)}$, если $q(x)=\sqrt[5]{x(6-x)}$.

Ответы:

1. $$\frac{15\cdot\sqrt[5\cdot 28]{a}-7\cdot\sqrt[7\cdot 20]{a}}{2\cdot\sqrt[35\cdot 4]{a}}=\frac{15\sqrt[140]{a}-7\sqrt[140]{a}}{2\sqrt[140]{a}}=\frac{8\sqrt[140]{a}}{2\sqrt[140]{a}}=4.$$

Ответ: 4.

2. Так как по условию $g(x)=\sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x|\neq 2$, то:

$$g(2-x)=\sqrt[3]{(2-x)(4-(2-x))}=\sqrt[3]{(2-x)(2+x)};$$

$$g(2+x)=\sqrt[3]{(2+x)(4-(2+x))}=\sqrt[3]{(2+x)(2-x)};$$

$$\frac{g(2-x)}{g(2+x)}=\frac{\sqrt[3]{(2-x)(2+x)}}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{(2-x)}\,\cancel{(2+x)}}{\cancel{(2+x)}\,\cancel{(2-x)}}}=\sqrt[3]{1}=1.$$

Ответ: 1.

3. Освободимся от иррациональности в знаменателе первой дроби:

$$\frac{(\sqrt{7}-2)\cdot(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)\cdot(\sqrt{7}-2)}-\frac{11-4\sqrt{7}}{3}=\frac{(\sqrt{7}-2)^2}{(\sqrt{7})^2-2^2}-\frac{11-4\sqrt{7}}{3}=$$

$$=\frac{(\sqrt{7})^2-4\sqrt{7}+4}{7-4}-\frac{11-4\sqrt{7}}{3}=\frac{11-4\sqrt{7}}{3}-\frac{11-4\sqrt{7}}{3}=0.$$

Ответ: 0.

4. $$\frac{(\sqrt[3]{3})^3-2^3}{(\sqrt[3]{3})^2+2\sqrt[3]{3}+2^2}-\sqrt[3]{3}=\frac{(\sqrt[3]{3}-2)\cdot\left((\sqrt[3]{3})^2+2\sqrt[3]{3}+2^2\right)}{(\sqrt[3]{3})^2+2\sqrt[3]{3}+2^2}-\sqrt[3]{3}=$$

$$=\sqrt[3]{3}-2-\sqrt[3]{3}=-2.$$

Ответ: –2.

5. *Ответ*: 3.

6. *Ответ*: 1.

Основные свойства арифметических корней n-й степени
($n\geqslant 2,\ n\in N$)

1. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, если $a\geqslant 0$, $\left(\sqrt[2n-1]{a}\right)^{2n-1}=a$, где $a\in R$	4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, $k\in N,\ k\geqslant 2,\ a\geqslant 0$	6. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, где $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$
2. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert=\begin{cases}a, \text{ если } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ если } a<0;\end{cases}$ $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}=a$, где $a\in R$	5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$, $k\in N,\ k\geqslant 2,\ a\geqslant 0$	7. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a\geqslant 0,\ b>0$
3. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a\geqslant 0,\ m\in Z,\ k\in N$		

День 15

1.4.4. Преобразование тригонометрических выражений

1. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135°)$.

1

2. Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin 16° \cdot \cos 16°}{\sin 32°}$.

2

3. Найдите $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

3

4*. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos 2\alpha}\right)$$ при $\alpha = 60°$.

4

5. Найдите значение выражения $\dfrac{50\sin 179° \cdot \cos 179°}{\sin 358°}$.

5

6. Найдите значение выражения $7\cos(\pi+\alpha)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

6

Формулы сложения

$\sin(\alpha \pm \beta) =$
$= \sin\alpha \cos\beta \pm$
$\pm \cos\alpha \sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) =$
$= \cos\alpha \cos\beta \mp$
$\mp \sin\alpha \sin\beta;$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha \pm \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,$

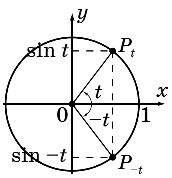
$n \in Z;$

$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) =$

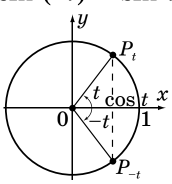
$= \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta},$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha \pm \beta \neq \pi n,\ n \in Z.$

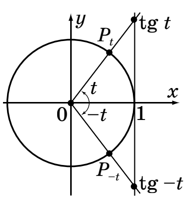
Четность (нечетность)



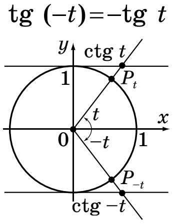
$\sin(-t) = -\sin t$



$\cos(-t) = \cos t$



$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$



$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$

1. $-18\sqrt{2} \cdot (-\sin 135^\circ) = -18\sqrt{2}\left(-\sin(180^\circ - 45^\circ)\right) =$

$= 18\sqrt{2}\sin 45^\circ = 18 \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} = 18.$

Ответ: 18.

2. $\dfrac{2 \cdot 2\sin 16^\circ \cdot \cos 16^\circ}{\sin 32^\circ} = \dfrac{2\cancel{\sin} 32^\circ}{\cancel{\sin} 32^\circ} = 2.$

Ответ: 2.

3. $26\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 26\sin\alpha;$ $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha};$ так как $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Ответ: $-\dfrac{5}{13}$.

4. Важно помнить, что $y = \cos x$ — четная функция, т. е. $\cos(-x) = \cos x$.

$$\frac{\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha + \cos\alpha \cos 3\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \sin 3\alpha} \cdot \frac{2\sin\frac{5\alpha + 7\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha - 7\alpha}{2}}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha - 3\alpha)}{\frac{1}{2}\sin 6\alpha} \cdot \frac{2\sin 6\alpha \cdot \cos(-\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos(-2\alpha)}{\frac{1}{2}\sin 6\alpha} \cdot \frac{2\sin 6\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cancel{\cos 2\alpha} \cdot 4 \cdot \cancel{\sin 6\alpha}\cos\alpha}{\cancel{\sin 6\alpha} \cdot \cancel{\cos 2\alpha}} = 4\cos\alpha.$$

При $\alpha = 60^\circ$ $4\cos\alpha = 4\cos 60^\circ = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$.
Ответ: 2.

5. *Ответ*: 25.

6. *Ответ*: $\dfrac{5}{3} = 1\dfrac{2}{3} = 1,(6)$.

День 16

1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования
1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа

1. Найдите значение выражения $8^{2\log_8 3}$.

2. Найдите значение выражения $5^{3+\log_5 2}$.

3. Найдите значение выражения $9^{\log_3 4}$.

4. Найдите значение выражения $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25$.

5*. Найдите значение выражения

$$\left|\log_5 \frac{1}{125}\right| + \left|\lg 25 + \lg 4\right| - \left|\ln e^3\right| + \left|\log_{\frac{1}{21}} \sqrt{21}\right|.$$

6. Найдите значение выражения $16^{\log_4 7}$.

7. Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 49}$.

Ответы:

1. $8^{\log_8 3^2} = 3^2 = 9.$

Ответ: 9.

2. $5^{3+\log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{\log_5 2} = 125 \cdot 2 = 250.$

Ответ: 250.

3. $9^{\log_3 4} = \left(3^2\right)^{\log_3 4} = 3^{2\log_3 4} = 3^{\log_3 4^2} = 4^2 = 16.$

Ответ: 16.

4. Применим формулу $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ при

$$a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1.$$

$$\log_{0,8} 3 = \frac{1}{\log_3 0,8},$$

тогда данное выражение приводится к виду:

$$\frac{1}{\log_3 0,8} \cdot \log_3 1,25 = \frac{\log_3 1,25}{\log_3 0,8} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} 1\frac{1}{4} =$$

$$= \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = \log_{\frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = -1.$$

Ответ: –1.

5.

$$\left|\log_5 5^{-3}\right| + \left|\lg 25 \cdot 4\right| - \left|3\right| + \left|\log_{21^{-1}} 21^{\frac{1}{2}}\right| =$$

$$= \left|-3\right| + \left|\lg 100\right| - 3 + \left|\frac{1}{-1}\log_{21} 21^{\frac{1}{2}}\right| =$$

$$= \cancel{3} + \left|2\right| - \cancel{3} + \left|-\frac{1}{2}\right| = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

6. *Ответ*: 49.

7. *Ответ*: 7.

Формула перехода к новой основе

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$;

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$
$$10^{\lg b} = b.$$

Свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0$,
   $\log_a a = 1$,
   где $a > 0$, $a \neq 1$.
2. Логарифм произведения
   $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$,
   где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.
3. Логарифм частного
   $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
   где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.
4. Логарифм степени
   $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$,
   где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $p \in R$.

Модуль действительного числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

День 17

2.1. Уравнения

2.1.1. Квадратные уравнения

1. Найдите корень уравнения $4x^2+12x-27=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

1

2. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 20 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

2

3. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0=30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a=5$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошел путь $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$. Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 80 метров. Ответ выразите в секундах.

3

4. Найдите корень уравнения $4x^2-20x-75=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

4

Ответы:

Уравнение
$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$
$D=b^2-4ac$ — дискриминант

$D<0$	$\varnothing$
$D=0$	$x=-\dfrac{b}{2a}$
$D>0$	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Уравнение
$ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ b=0$

$ac>0$	$\varnothing$
$ac<0$	$x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
$ac=0$	$x=0$

Уравнение
$x^2+px+q=0$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Уравнение
$ax^2+bx=0,\ c=0,\ x=0$

$$x=-\frac{b}{a}$$

Уравнение
$ax^2+2kx+c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

1. Используем формулу корней квадратного уравнения вида $ax^2+2kx+c=0$, т. е. с четным вторым коэффициентом:

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Для данного уравнения: $a=4$; $k=6$; $c=-27$.

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot(-27)}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{144}}{4}=\frac{-6\pm 12}{4};$$

$$x_1=\frac{-6-12}{4}=\frac{-18}{4}=-4,5;$$

$$x_2=\frac{-6+12}{4}=\frac{6}{4}=1,5.$$

Меньший корень $x=-4,5$.
Ответ: –4,5.

2. Пусть первый автомобиль прошел путь S со скоростью x км/ч. Тогда время его движения равно $\dfrac{S}{x}$.

Второй автомобиль проехал половину пути $\dfrac{S}{2}$ со скоростью 30 км/ч за время $\dfrac{S}{2\cdot 30}$, а вторую половину пути $\dfrac{S}{2}$ — со скоростью $(x+20)$ км/ч за время $\dfrac{S}{2(x+20)}$, т. е. общее время движения второго автомобиля $\dfrac{S}{2\cdot 30}+\dfrac{S}{2(x+20)}$.

Время движения автомобилей одинаково. Поэтому получим уравнение: $\dfrac{S}{2\cdot 30}+\dfrac{S}{2(x+20)}=\dfrac{S}{x}$. Сократим обе части уравнения на $S\neq 0$: $\dfrac{1}{2\cdot 30}+\dfrac{1}{2(x+20)}=\dfrac{1}{x}$.

$$x^2+20x+30x=60x+1200;$$

$$x^2-10x-1200=0.$$

Получим корни: $x_1=-30$, который не отвечает физическому смыслу задачи, $x_2=40$ (км/ч).
Ответ: 40.

3. *Ответ*: 4.

4. *Ответ*: –2,5.

День 18

2.1.2. Рациональные уравнения

1*. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Расстояние $AB = 10$ км. Через 30 мин после него из пункта A в пункт B выехал велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист, обогнав пешехода и доехав до пункта B, вернулся снова в пункт A в тот же момент, когда пешеход пришел в пункт B. Найдите скорость пешехода. Ответ запишите в км/ч.

1

2*. При испытании на экономичность двух двигателей одинаковой мощности было установлено, что один израсходовал 300 г бензина, а второй, работавший на 2 часа меньше, израсходовал 192 г. Если бы первый двигатель расходовал в час столько же бензина, сколько второй, а второй — столько же, сколько первый, то за время работы расход бензина был бы одинаковый. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель? В ответе запишите сумму чисел в граммах.

2

3*. Решите уравнение $\dfrac{(12 - x) \cdot (x - 2)}{4 - x^2} = 0$.

3

4*. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из пункта A в пункт B и из пункта B в пункт A. После встречи одному приходится быть в пути еще 2 часа, а другому $\dfrac{9}{8}$ часа. Определите скорости автомобилеёй, если расстояние между пунктами A и B равно 210 км. В ответе запишите меньшее число, выразив его в км/ч.

4

Ответы:

Теоремы о равносильности уравнений

1. Для любого числа a равносильны такие уравнения:

$\square = \bigcirc$ и $\square + a = \bigcirc + a$;

$\square = \bigcirc$ и $\square - a = \bigcirc - a$.

2. Для любого числа $a \neq 0$ равносильны такие уравнения:

$\square = \bigcirc$ и $\square \cdot a = \bigcirc \cdot a$;

$\square = \bigcirc$ и $\dfrac{\square}{a} = \dfrac{\bigcirc}{a}$.

3. Равносильны такие уравнения:

$\triangle + \square = \bigcirc$ и $\triangle = \bigcirc - \square$;

$\triangle + \square = \bigcirc$ и $\square = \bigcirc - \triangle$;

$\triangle + \square = \bigcirc$ и $\triangle + \square - \bigcirc = 0$.

1. Пусть скорость пешехода x км/ч, тогда скорость велосипедиста — $(x+6)$ км/ч.

Составим таблицу для решения задачи:

	v (км/ч)	t (час)	S (км)
Пешеход	x	$\dfrac{10}{x}$	10
Велосипедист	$x+6$	$\dfrac{20}{x+6}$	20

По условию задачи пешеход вышел на 30 мин $= \dfrac{1}{2}$ ч раньше, т. е он потратил времени больше, чем велосипедист, на $\dfrac{1}{2}$ ч. Получим уравнение:

$$\frac{10}{x} - \frac{20}{x+6} = \frac{1}{2};\quad 20x + 120 - 40x = x^2 + 6x, \text{ при } x \neq 0,\ x \neq -6.$$

$$x^2 + 26x - 120 = 0. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4; \\ x = -30; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \neq 0; \\ x \neq -6. \end{array}\right. \end{cases}$$

$x = -30$ не удовлетворяет условию задания (скорость не может быть отрицательной).

Ответ: 4.

2. Пусть x и $(x-2)$ — время работы в часах первого и второго двигателей. Расходы бензина первым и вторым двигателем в граммах составляют $\dfrac{300}{x}$ и $\dfrac{192}{x-2}$. По условию

$$\frac{300}{x} \cdot (x-2) = \frac{192}{x-2} \cdot x;\quad \frac{25(x-2)}{x} = \frac{16x}{x-2};$$

$$\begin{array}{l} 25(x-2)^2 = 16x^2; \\ 9x^2 - 100x + 100 = 0. \end{array} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 10; \\ x = \dfrac{10}{9}; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \neq 0; \\ x \neq 2. \end{array}\right. \end{cases}$$

По смыслу задачи $x > 2$, поэтому $x = 10$. $\dfrac{300}{10} = 30$ и $\dfrac{192}{8} = 24$. Сумма: $30 + 24 = 54$.

Ответ: 54.

3. *Ответ*: 12.

4. *Ответ*: 60.

День 19

2.1.3. Иррациональные уравнения

1*. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$.

1

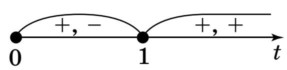
2. Найдите корень уравнения $\sqrt{22-3x}=2$.

2

3*. Решите уравнение $\sqrt{9-x}=\sqrt{x-3}$.

3

Ответы:

Критерии проверки решения:	**1.** *Решение*:
1 балл. Верно выделен квадрат двучлена каждого из внешних корней, использована формула $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$, но в дальнейшем решении допущены ошибки.	Представим каждое выражение, стоящее под знаком внешнего корня, в виде: $\sqrt{x-1+2\cdot 1\cdot\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\cdot 1\cdot\sqrt{x-1}+1}=x+1.$ Сделаем замену: $t=\sqrt{x-1}$, $t\geqslant 0$. Тогда $x-1=t^2$ и $x+1=t^2+2$. Получим $\sqrt{t^2+2\cdot 1\cdot t+1}+\sqrt{t^2-2\cdot 1\cdot t+1}=t^2+2.$ Очевидно, что под знаком каждого корня находится квадрат двучлена: $\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=t^2+2,$ откуда $\lvert t+1\rvert+\lvert t-1\rvert=t^2+2,$ т. к. $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$.
2 балла. Обоснованно получен верный ответ.	ОДЗ полученного уравнения: $t\in R$, нули подмодульных функций $t=-1$ и $t=1$. Однако по смыслу задачи $t\geqslant 0$, поэтому мы рассматриваем только два промежутка, на котором каждая подмодульная функция сохранит знак.  2. При $t\in[0;1]$ имеем уравнение: $(t+1)-(t-1)=t^2+2;\ \ t+1-t+1=t^2+2;\ \ t^2=0;\ \ t=0,$ решение находится в промежутке $[0;1]$. 1. При $t\in(1;+\infty)$ имеем уравнение $t+1+t-1=t^2+2;\ \ t^2-2t+2=0.$ Данное уравнение корней не имеет. Получаем единственный корень $t=0$, выполняем обратную замену: $\sqrt{x-1}=t;\ \ \sqrt{x-1}=0;\ \ x=1.$ *Ответ*: 1.

2. *Ответ*: 6.

3. *Ответ*: 6.

День 20

2.1.4. Тригонометрические уравнения

1. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

1

2*. Найдите количество корней уравнения $\sin 7x-\sin 5x=0$ на интервале $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

2

3. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(x+5)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

3

4*. Определите количество корней уравнения $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$ на интервале $[0;\pi]$.

4

Ответы:

1. $\cos\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{1}{2}$; $\frac{\pi(x-1)}{3}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

$\frac{\pi(x-1)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; $\frac{x-1}{3}=\pm\frac{1}{3}+2n$, $n\in Z$;

$x-1=\pm1+6n$, $n\in Z$.

Имеем две серии корней:
$x=1+1+6n,\quad n\in Z$ и $x=1-1+6m,\quad m\in Z$; $x=2+6n$, $n\in Z$ и $x=0+6m$, $m\in Z$; $n=0$, $x=2$ и $n=0$, $x=0$;

$n=-1$, $x=2-6=-4$ и $n=-1$, $x=-6$;

$n=-2$, $x=2-6\cdot2=-10$ и $n=-2$, $x=-12$.

Очевидно, что наибольший отрицательный корень $x=-4$.
Ответ: –4.

arcsin $a=t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

и $\sin t=a$.

arccos $a=t \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t\in[0;\pi]$

и $\cos t=a$.

arctg $a=t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

и tg $t=a$.

arcctg $a=t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\in(0;\pi)$

и ctg $t=a$.

2. Воспользуемся формулой $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, получим:

$$2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2}=0;\ 2\sin x\cdot\cos6x=0.$$

Тогда:

$$\sin x=0 \text{ или } \cos6x=0;$$

$x=\pi n,\ n\in Z$ или $6x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\ k\in Z$.

Определим количество корней уравнения, принадлежащих интервалу $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$:

1. $x=\pi n;\ n\in Z;\qquad n=0;\ x=0;\ 0\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$; 1корень;

$n=1;\ x=\pi;\ \pi\notin\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

2. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6};\ k\in Z$;

$k=0;\ x=\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$;

$k=1;\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ 2 корня;

$k=2;\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}=\frac{5\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12}\notin\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Очевидно, что интервалу $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ принадлежат 3 корня.

Ответ: 3.

3. *Ответ*: –4.

4. *Ответ*: 1.

День 21

2.1.4. Тригонометрические уравнения

1*. При каких значениях a уравнение

$\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$ будет иметь два корня на интервале $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$? Найдите эти корни.

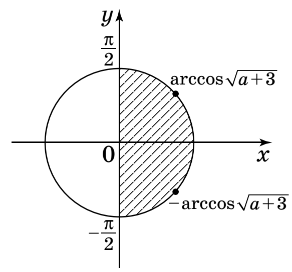
	1

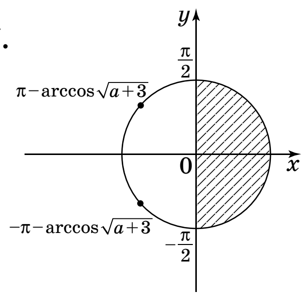
2*. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и укажите в ответе количество корней на интервале $[0;\pi]$.

	2

Ответы:

1.

<table>
<tr><td>Критерии проверки решения:</td><td>Решение:</td></tr>
<tr><td>1 балл.
Сделана верно замена переменной и найден дискриминант квадратного уравнения относительно новой переменной.</td><td>$\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0.$
Сделаем замену $\cos^2 x=t$; очевидно, что $0\le t\le 1.$
Получаем уравнение:
$t^2-(a+2)t-(a+3)=0;$
$D=(a+2)^2+4(a+3)=a^2+4a+4+4a+12=a^2+8a+16;$
$D=(a+4)^2.$</td></tr>
<tr><td>2 балла.
Верно определены корни уравнений и найдено значение a при котором уравнение имеет решение..</td><td>$t_{1,2}=\dfrac{(a+2)\pm(a+4)}{2};$
$t_1=\dfrac{a+2+a+4}{2}=\dfrac{2a+6}{2}=a+3;$
$t_2=\dfrac{a+2-a-4}{2}=-1,$ не удовлетворяет условию $0\leqslant t\leqslant 1.$
Получаем уравнение: $\cos^2 x=a+3.$
Поскольку $0\leqslant t\leqslant 1$, то $0\leqslant a+3\leqslant 1;$ $-3\leqslant a\leqslant -2.$</td></tr>
<tr><td>3 балла.
Решены оба уравнения, полученные в результате обратной замены, но неверно выбран ответ..</td><td rowspan="2">Имеем два уравнения:
1. $\cos x=\sqrt{a+3};$
$x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+2\pi n,\ n\in Z.$


Получаем два корня на интервале $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$: $x=\pm\arccos\sqrt{a+3};$
2. $\cos x=-\sqrt{a+3};$
$x=\pm\left(\pi-\arccos\sqrt{a+3}\right)+2\pi k,\ k\in Z.$
Очевидно, что эти корни не принадлежат интервалу $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.


Ответ: при $a\in[-3;-2]$ уравнение имеет на интервале $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ два корня вида $x=\pm\arccos\sqrt{a+3}.$</td></tr>
<tr><td>4 балла.
Обоснованно получен верный ответ..</td></tr>
</table>

2. *Ответ*: 3.

День 22

2.1.5. Показательные уравнения

1. Найдите решение уравнения $\left(\dfrac{1}{15}\right)^{x+4} = 15^x$.

2*. Решите уравнение $2^{2\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{2\sqrt{x}-1} = 40$.

3*. Решите уравнение $5^x + 6^x = 11^x$.

4. Найдите корень уравнения $4^{1-2x} = 64$.

5*. Решите уравнение $2^{x-2} = 3^{x-2}$.

1
2
3
4
5

Ответы:

Решение показательных уравнений

$a^{f(x)}=b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$

Решение:

$a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b$

$a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1)$

Решение:

$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

$b_1a^{mx+k_1}+b_2a^{mx+k_2}+\ldots+b_na^{mx+k_n}=c$

Решение:

$b_1a^{mx+k_1}+b_2a^{mx+k_2}+\ldots+b_na^{mx+k_n}=c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{mx}(b_1a^{k_1}+b_2a^{k_2}+\ldots+b_na^{k_n})=c$

$Aa^{2x}+Ba^x+C=0$

Решение:

$Aa^{2x}+Ba^x+C=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x=t, \\ At^2+Bt+C=0 \end{cases}$$

$Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0$

Решение:

$Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C=0.$$

---

1. $\left(\frac{1}{15}\right)^{x+4}=15^x$; $\left(\frac{1}{15}\right)^{x+4}=\left(\frac{1}{15}\right)^{-x}$; $x+4=-x$;

$2x=-4$; $x=-2$.

Ответ: -2.

2. $2^{2\sqrt{x}}+3\cdot 2^{2\sqrt{x}-1}=40$. ОДЗ $x\geq 0$. Вынесем за скобки общий множитель, т. е. множитель с наименьшим показателем: $2^{2\sqrt{x}-1}\cdot(2+3)=40$;

$2^{2\sqrt{x}-1}\cdot 5=40$; $2^{2\sqrt{x}-1}=40:5$; $2^{2\sqrt{x}-1}=8$; $2^{2\sqrt{x}-1}=2^3$;

$2\sqrt{x}-1=3$; $2\sqrt{x}=4$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$.

Ответ: 4.

3. $5^x+6^x=11^x$. Разделим обе части уравнения на $11^x\neq 0$.

$$\left(\frac{5}{11}\right)^x+\left(\frac{6}{11}\right)^x=1.$$

Очевидно, что функция $y=\left(\frac{5}{11}\right)^x+\left(\frac{6}{11}\right)^x$ убывающая, поскольку $\frac{5}{11}<1$ и $\frac{6}{11}<1$, а функция $y=1$ постоянная. Графики этих функций пересекаются только в одной точке, которая легко определяется подбором, т. е. $x=1$.

Ответ: 1.

4. *Ответ*: -1.

5. *Ответ*: 2.

День 23

2.1.6. Логарифмические уравнения

1*. Найдите корень уравнения $\log_3(4-x)=4$.

1

2. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 4$ моля воздуха объемом $V_1 = 15$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ постоянная, а $T = 300°$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10980 Дж?

2

3*. Найдите сумму корней уравнения $x^{\lg x} = 10$.

3

4. Найдите корень уравнения $\log_2(8+x)=3$.

4

5. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 4$ моля воздуха объемом $V_1 = 72$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 14{,}9$ постоянная, а $T = 300°$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 35760 Дж?

5

Ответы:

Решение логарифмических уравнений
$a>0,\ a\neq 1$

$\log_a f(x)=b$
Решение: $x=a^b$.

$\log_a f(x) =$
$= \log_a g(x)$

Решение:
$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$\log_a f(x)=g(x)$
Решение:
$$\begin{cases} f(x) = a^{g(x)}, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

$b_1 \log_a f_1(x)+$
$+b_2 \log_a f_2(x)=$
$=c\log_a f_3(x)$
Решение:
$$\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_3(x) > 0, \\ f_1^{b_1}(x) \cdot f_2^{b_2}(x) = f_3^{c}(x) \ . \end{cases}$$

1. $\log_3(4-x)=4$. По определению логарифма:

$$\begin{cases} 4-x=3^4; \\ 4-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4-81; \\ x<4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-77; \\ x<4. \end{cases}$$

Ответ: -77.

2. По условию задачи работа, совершаемая под водой $A=\alpha\nu T\log_2\dfrac{V_1}{V_2}$, равна 10980Дж, при этом $\nu=4$ моля; $V_1=15$ л; $\alpha=9{,}15$; $T=300°$ К. Получаем уравнение:

$$10980 = 9{,}15\cdot 4\cdot 300\cdot \log_2\frac{15}{V_2} \text{ или } 10980\log_2\frac{15}{V_2}=10980;$$

$$\log_2\frac{15}{V_2}=1;\quad \frac{15}{V_2}=2^{1};\quad V_2=7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

3. Логарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получим: $\lg x^{\lg x}=\lg 10$.
Используя свойство $\log_a x^m = m\log_a x$, получаем: $\lg x\cdot\lg x=1$ или $(\lg x)^2=1$, откуда имеем два уравнения:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x=1; \\ \lg x=-1; \end{array}\right. \\ x>0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x=10; \\ x=10^{-1}=0{,}1. \end{array}\right.$$

Сумма корней $10+0{,}1=10{,}1$.
Ответ: 10,1.

4. *Ответ*: 0.

5. *Ответ*: 18.

День 24

2.1.6. Логарифмические уравнения

1*. Определите количество корней уравнения $\log_7\left(\sqrt{2}\sin x\right) = \log_{49}(2+\cos x)$, находящихся в интервале $\left[0;2\pi\right]$.

1

2*. Решите уравнение $3^{\log^2_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$. В ответе запишите больший корень.

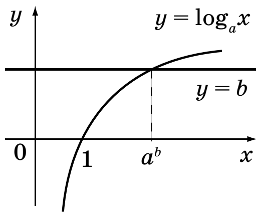
2

3*. Найдите корень уравнения $\log_5\left(x^2-1\right) = \log_5\left(7x-7\right)$.

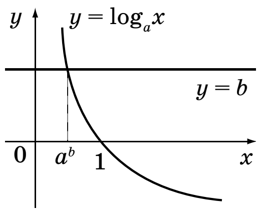
3

Ответы:

Уравнение
$\log_a x = b$ ($a>0$, $a\neq 1$)



$a<1$



$0<a<1$

Решение: $x=a^b$

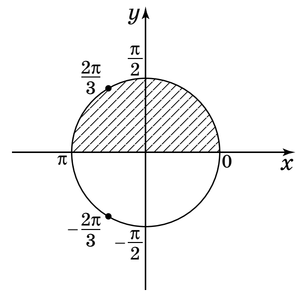
Дополнительные свойства логарифмов

1. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$;

2. $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p}\log_a b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $p\neq 0$;

3. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$.

1. $\log_7\left(\sqrt{2}\sin x\right) = \log_{49}(2+\cos x)$. Используя формулу $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k}\log_a x$, приведем уравнение к одному основанию:



$$\log_7\left(\sqrt{2}\sin x\right) = \frac{1}{2}\log_7(2+\cos x) \text{ или}$$

$$2\log_7\left(\sqrt{2}\cdot\sin x\right) = \log_7(2+\cos x).$$

По формуле $\log_a x^m = m\log_a x$ получаем

$$\log_7\left(\sqrt{2}\sin x\right)^2 = \log_7(2+\cos x),$$

тогда уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin^2 x = 2+\cos x; \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение, находим корни и учтем, что $\sin x > 0$ при $x\in(0;\pi)$. Используем формулу

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, тогда $2 - 2\cos^2 x = 2 + \cos x$

$$2\cos^2 x + \cos x = 0; \quad \cos x(2\cos x+1) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \text{ или } x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Очевидно, что с учетом условия $x\in(0;\pi)$ получаем, что на интервале $[0;2\pi]$ есть два корня.
Ответ: 2.

2. Используя формулу $a^{mn} = (a^m)^n$, получим:

$$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

Учитывая основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, имеем:

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162;\ \ 2\cdot x^{\log_3 x} = 162;\ \ x^{\log_3 x} = 81.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3: $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$; учитывая формулу $\log_a x^k = k\log_a x$, получим $\log_3^2 x = 4$, тогда

$\log_3 x = 2$; $x = 3^2$; $x = 9$. Или: $\log_3 x = -2$; $x = 3^{-2}$; $x = \dfrac{1}{9}$.

Больший корень 9.
Ответ: 9.

3. *Ответ*: 6.

День 25

2.1.7. Системы уравнений
2.1.8. Способы сложения, подстановки, замены переменной

1*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 30; \\ \log_2 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$$

В ответе запишите сумму $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы.

1

2*. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x - 3^y = 7; \\ 2^x + 3^y = 25. \end{cases}$

В ответе запишите произведение $x_0 \cdot y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

2

3*. Решите систему, в ответе запишите $x_0 - y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x + y} + \sqrt[4]{x - y} = 4; \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 8. \end{cases}$$

3

4*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8; \\ 4x - 3y = -2. \end{cases}$$

В ответе запишите $x_0 \cdot y_{0,}$ где $(x_0; y_0)$ — решение системы.

4

5*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2; \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

В ответе запишите $x_0 + y_{0,}$ где $(x_0; y_0)$ — решение системы.

5

Ответы:

Решение систем уравнений методом подстановки

1. Из одного уравнения системы выразить одну переменную через другую и известные величины.
2. Найденное решение подставить во второе уравнение системы, получить уравнение относительно второй переменной.
3. Решить полученное уравнение и найти значение этой переменной.
4. Подставить найденное значение в выражение для первой переменной, получить соответствующиезначения и записать ответ.

Решение систем уравнений методом сложения

1. Уравнять коэффициенты при одной переменной путем почленного умножения обоих уравнений на соответствующим образом подобранные множители.
2. Сложить (вычесть) почленно уравнения системы, исключая одну из переменных.
3. Решить полученное уравнение с одной переменной.
4. Значение второй переменной можно найти таким же образом.
5. Записать ответ

1. Очевидно, что ОДЗ данной системы уравнений: $x > 0$, $y > 0$.
Решим систему уравнений способом подстановки. Из первого уравнения: $x = 30 + y$, после подстановки x во второе уравнение получим:
$\log_2(30 + y) + \log_2 y = 6$.
Применим формулу $\log_a m + \log_a n = \log_a mn$:
$\log_2(30 + y) \cdot y = 6$. Тогда $y^2 + 30y = 2^6$; $y^2 + 30y - 64 = 0$.
$y_1 = 2$ и $y_2 = -32$ (не удовлетворяет ОДЗ).
Получили: $y_0 = 2$; $x_0 = 30 + 2 = 32$.
Сумма: $x_0 + y_0 = 32 + 2 = 34$.
Ответ: 34.

2. $\begin{cases} 2^x - 3^y = 7; \\ 2^x + 3^y = 25. \end{cases}$

Сложим почленно уравнения системы, получим:
$$2 \cdot 2^x = 32;\ 2^x = 16;\ 2^x = 2^4;\ x = 4.$$
Вычтем из второго уравнения первое, тогда:
$$2 \cdot 3^y = 18;\ 3^y = 9;\ 3^y = 3^2;\ y = 2.$$
Таким образом, решение системы:
$$x_0 = 4;\ y_0 = 2,\ x_0 \cdot y_0 = 4 \cdot 2 = 8.$$
Ответ: 8.

3. Введем новые переменные $\sqrt[4]{x + y} = t$; $\sqrt[4]{x - y} = z$, тогда получим систему:

$\begin{cases} t + z = 4; \\ t^2 - z^2 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} t + z = 4; \\ (t - z)(t + z) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} t + z = 4; \\ (t - z) \cdot 4 = 8; \end{cases}$

$$+\begin{cases} t + z = 4; \\ t - z = 2; \end{cases} \quad -\begin{cases} t + z = 4; \\ t - z = 2. \end{cases}$$
$$2t = 6;\ t = 3;\quad 2z = 2;\ z = 1.$$

Возвращаемся к заданным переменным:

$\begin{matrix} \sqrt[4]{x + y} = 3; \\ \sqrt[4]{x - y} = 1; \end{matrix}$ $\begin{cases} x + y = 3^4; \\ x - y = 1^4; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 81; \\ x - y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 82; \\ 2y = 80. \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 41; \\ y_0 = 40. \end{cases}$

$x_0 - y_0 = 1$.

Проверка: $\begin{cases} \sqrt[4]{41 + 40} + \sqrt[4]{41 - 40} = 3 + 1 = 4; \\ \sqrt{41 + 40} - \sqrt{41 - 40} = 9 - 1 = 8. \end{cases}$

Ответ: 1.

4. *Ответ*: 2.

5. *Ответ*: 10.

День 26

2.1.9. Основные приемы решения систем уравнений

1*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sin y - \cos y; \\ 2\sin 2x = \dfrac{3}{2} + \sin 2y. \end{cases}$$

1

2*. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

2

В ответе запишите $x_0 \cdot y_0$, где $(x_0; y_0)$ — одно из решений исходной системы.

Ответы:

Критерии проверки решения:	1. *Решение*:

1 балл.
Получена совокупность систем, равносильная данной, или система решена, но получен неточный ответ в результате ошибки.

Введем новые переменные:
1) $\sin x + \cos x = t$; $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$.
Тогда, используя формулы $2\sin x\cos x = \sin 2x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим $\sin 2x = t^2 - 1$.
2) $\sin y - \cos y = z$; $\sin^2 y - 2\sin y\cos y + \cos^2 y = z^2$, аналогично получим, что $\sin 2y = 1 - z^2$.

Получим систему уравнений: $\begin{cases} t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + z; \\ 2t^2 + z^2 = \dfrac{9}{2}. \end{cases}$

2 балла.
Обосновано получен верный ответ.

Подставим значение t из первого уравнения во второе:

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + z\right)^2 + z^2 = \frac{9}{2};\quad 1 + 2\sqrt{2}z + 2z^2 + z^2 = \frac{9}{2};$$

$$6z^2 + 4\sqrt{2}z - 7 = 0.\quad z_1 = -\frac{7\sqrt{2}}{6};\quad t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Исходная система равносильна совокупности двух систем:

1. $\begin{cases} \sin x + \cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}; \\ \sin y - \cos y = -\dfrac{7\sqrt{2}}{6}. \end{cases}$ Система решений не имеет,

так как $|\sin y - \cos y| \le \sqrt{2}$, $\left|-\dfrac{7\sqrt{2}}{6}\right| > \sqrt{2}$, т. е. $\dfrac{7\sqrt{2}}{6} > \sqrt{2}$.

2. Для решения второй системы используем формулы

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right),\ \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}; \\ \sin y - \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \\ \sqrt{2}\sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1; \\ \sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \\ y - \dfrac{\pi}{4} = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z; \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $n, k \in Z$.

2. *Ответ*: 12.

День 27

2.1.10. Использование свойств графиков функций

1*. При каких значениях a уравнение $2(x-3)^2 - |x-3| + a = 0$ имеет ровно два различных корня?

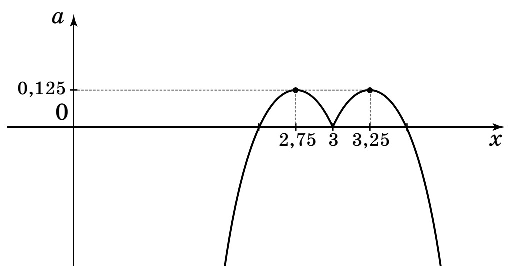
1

2*. Решите уравнение, используя свойства графиков функций: $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x} + x^2$.

2

Указание: рассмотрите область определения функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.

Ответы:

Критерии проверки решения:	**1.** *Решение*:
1 балл. Верно рассмотрены случаи $x \geq 3$ и $x < 3$, но нет верного ответа.	Рассмотрим функцию вида $a = \lvert x-3 \rvert - 2(x-3)^2$.
2 балла. Верно рассмотрены случаи $x \geq 3$ и $x < 3$ и получена часть верного ответа.	1. При $x \geqslant 3$ $a = (x-3) - 2(x-3)^2$; $a = (x-3)(1-2x+6) = (x-3)(7-2x)$, или $a = -2x^2 + 13x - 21$. Найдем координаты вершины этой параболы: $x_в = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-13}{-2,2} = 3,25;$ $a_в = (3,25-3)\cdot(7-6,5) = 0,125.$
3 балла. Получен правильный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки.	2. При $x < 3$ $a = (3-x) - 2(3-x)^2$; $a = (3-x)(1-6+2x);$ $a = (3-x)\cdot(2x-5)$, или $a = -2x^2 + 11x - 15$. Найдем координаты вершин второй параболы: $x_в = \dfrac{-11}{-2,2} = 2,75;$ $a_в = (3-2,75)(5,5-5) = 0,125.$
4 балла. Обоснованно получен правильный ответ.	Таким образом, на координатной плоскости XOA множество, задаваемое уравнением $a = \lvert x-3 \rvert - 2(x-3)^2 = \begin{cases} -2x^2+13x-21 \text{ при } x \geqslant 3; \\ -2x^2+11x-13 \text{ при } x < 3; \end{cases}$ состоит из симметричных относительно прямой $x = 3$ частей двух парабол с вершинами, соответствующими значению параметра $a = 0,125$, и общей точкой $x = 3$, $a = 0$.  По графику видно, что уравнение имеет ровно два различных решения при $a = 0,125$ и $a < 0$. *Ответ*: $a = 0,125;$ $a < 0$.

2. *Ответ*: корней нет.

День 28

2.1.11. Применение математических методов

1. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 7,2 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 10,4 километров?

1

2. Для транспортировки 39 тонн груза на 1100 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку за один рейс?

2

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

3. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 1,6 км. На сколько километров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

3

4. Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку за один рейс?

4

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

Ответы:

1. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, поэтому $l^2 = 2Rh$ и высоту можно найти по формуле $h = \dfrac{l^2}{2R}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Высота, на которой находится наблюдатель, находящийся на пляже:

$$h_1 = \frac{l_1^2}{2R} = \frac{7,2^2}{2 \cdot 6400}.$$

Высота, на которой находится наблюдатель, если он наблюдает расстояние до горизонта, которое увеличилось до 10,4 км:

$$h_2 = \frac{l_2^2}{2R} = \frac{10,4^2}{2 \cdot 6400}.$$

Очевидно, что человеку надо подняться на высоту

$$h = h_2 - h_1 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2R} = \frac{10,4^2 - 7,2^2}{2 \cdot 6400} = 0,0044 \text{ км} = 4,4 \text{ м}.$$

Ответ: 4,4.

2. При перемещении 39 тонн груза на 1100 км будет выполнена работа A:

$$A = S \cdot p = 39 \text{ тонн} \cdot 1100 \text{ км} = 42900 \text{ т} \cdot \text{км},$$

где $S = 1100$ км — расстояние перевозки; p — вес груза.

Определим $S_{\text{п}}$ — пробег грузовиков каждого типа,

по формуле $S_{\text{п}} = \dfrac{A}{q}$, где q — грузоподъемность.

$$S_{\text{пА}} = \frac{42900}{3,5}; \quad S_{\text{пБ}} = \frac{42900}{5}; \quad S_{\text{пВ}} = \frac{42900}{12};$$

Определим стоимость C перевозки для каждого перевозчика:

$$C_{\text{А}} = \frac{42900}{3,5} \cdot \frac{3200}{100} \approx 392228,5 \text{ руб.};$$

$$C_{\text{Б}} = \frac{42900}{5} \cdot \frac{4100}{100} = 351780 \text{ руб.};$$

$$C_{\text{В}} = \frac{42900}{12} \cdot \frac{9500}{100} = 339625 \text{ руб.}$$

Самая дешевая перевозка осуществляется перевозчиком В.

Ответ: 339 625.

3. *Ответ*: 3.

4. *Ответ*: 463 125.

День 29

2.2. Неравенства

2.2.1. Квадратные неравенства

1. Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 700 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

1

2. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 4$ кг и радиусом $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг $\cdot$ см^2, определяется по формуле $I = \dfrac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 1000 кг $\cdot$ см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

2

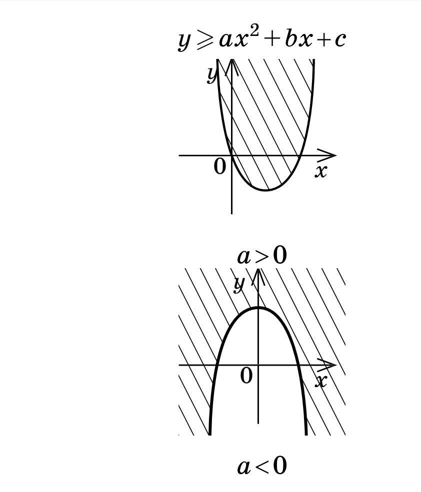
3. Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 130 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 360 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

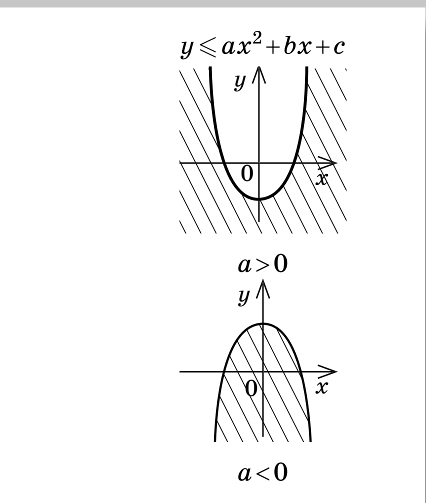
3

4. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 3$ кг и радиусом $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг $\cdot$ см^2, определяется по формуле $I = \dfrac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 775 кг $\cdot$ см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

4

Ответы:



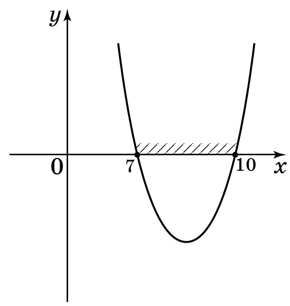


1. Подставим формулу для выражения объема спроса q в формулу вычисления выручки предприятия за месяц r, получим: $r(p) = q \cdot p = p(170 - 10p) = 170p - 10p^2$. По условию $r(p) \geqslant 700$ тыс. руб.
Составим и решим неравенство:

$$170p - 10p^2 \geqslant 700,\ \ -10p^2 + 170p - 700 \geqslant 0,$$

$$10p^2 - 170p + 700 \leqslant 0,\ \ p^2 - 17p + 70 \leqslant 0.$$

Функция $y = p^2 - 17p + 70$ — квадратичная, графиком ее является парабола, ветви которой направлены вверх (так как коэффициент при p^2 равен 1, $1 > 0$). Найдем нули функции $y = p^2 - 17p + 70$ (т. е. значения аргумента функции, при которых значение функции равно 0): $p^2 - 17p + 70 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $p_1 = 7$; $p_2 = 10$.



Изобразим схематически график нашей функции.
Очевидно, что $y \leqslant 0$ при $x \in [7; 10]$.
Значит, наибольшая цена p равняется 10 тыс. руб.
Ответ: 10.

2. По условию задачи $h > 0$, h — искомая величина. Подставим все данные значения в формулу момента инерции катушки I. Учтем, что по условию задачи $I \leqslant 1000$ кг $\cdot$ см^2. Получим неравенство:

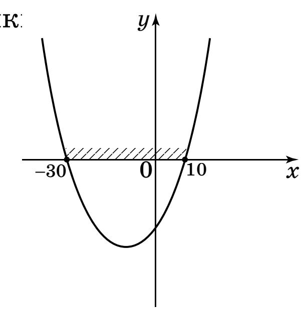
$$\frac{(4 + 2 \cdot 2) \cdot 10^2}{2} + 2 \cdot (2 \cdot 10 \cdot h + h^2) \leqslant 1000;$$

$$400 + 40h + 2h^2 - 1000 \leqslant 0;\ \ 2h^2 + 40h - 600 \leqslant 0;$$

$$h^2 + 20h - 300 \leqslant 0.$$

Рассмотрим функцию $y = h^2 + 20h - 300$. Она — квадратичная, графиком ее является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем нули функции $h^2 + 20h - 300 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $h_1 = -30$, $h_2 = 10$.

Изобразим схематически график функ
С помощью графика найдем решение неравенства:
$h^2 + 20h - 300 \leqslant 0$, $h \in [-30; 10]$.



Но $h > 0$, поэтому $h \in (0; 10]$. Значит, искомое максимальное значение $h = 10$ см.
Ответ: 10.

3. *Ответ*: 9.

4. *Ответ*: 15.

День 30

2.2.2. Рациональные неравенства

1. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 187 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c\dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 4 м/с. Ответ выразите в МГц.

1

2. Найдите все значения параметра a, при которых решение неравенства $|5x - a| + 3 \leqslant |x - 6|$ образует отрезок длиной 1.

2

3. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 190$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются более чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$м/с. Ответ выразите в м/с.

3

4. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 149 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c\dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 10 м/с. Ответ выразите в МГц.

4

Ответы:

1. Из условия задачи получим неравенство: $1500 \cdot \dfrac{f-187}{f+187} \leqslant 4$;

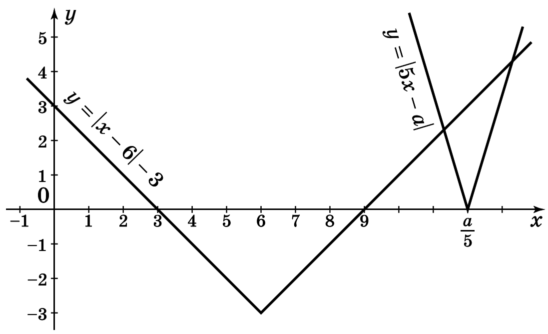
т. к. $f+187>0$, то $1500(f-187) \leqslant 4 \cdot (f+187)$;
$1500f - 4f \leqslant 1500 \cdot 187 + 4 \cdot 187$; $1496 \cdot f \leqslant 187 \cdot 1504$;
$f \leqslant 281248 : 1496$; $f \leqslant 188$. Значит, наибольшая возможная частота отраженного сигнала f равняется 188 МГц.

Ответ: 188.

2. *Решение*:

Критерии проверки решения:

Преобразуем данное неравенство: $|5x-a| \leqslant |x-6| - 3$. Построим в данной системе координат графики функций $y=|5x-a|$ и $y=|x-6|-3$:



1 балл.
В решении с помощью верного рассуждения указаны некоторые из искомых значений параметра.

Из рисунка видно, что данное неравенство имеет решение, если: $\dfrac{a}{5} \leqslant 3$, или $\dfrac{a}{5} \geqslant 9$, т. е. $a \leqslant 15$, или $a \geqslant 45$.

2 балла.
В решении найден хотя бы один верный интервал значений параметра.

Рассмотрим данное неравенство на каждом из полученных интервалов для a.

1) $\begin{cases} a \leqslant 15; \\ |5x-a| \leqslant -x+6-3; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant 15; \\ 5x-a \leqslant -x+3; \\ 5x-a \geqslant x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant 15; \\ x \leqslant \dfrac{a+3}{6}; \\ x \geqslant \dfrac{a-3}{4}. \end{cases}$

Решения данного неравенства образуют отрезок длиной 1, если $\dfrac{a+3}{6} - \dfrac{a-3}{4} = 1$, отсюда $2a+6-3a+9=12$;
$-a=-15+12$; $a=3$.

3 балла.
Получен правильный ответ, но при его обосновании допущены ошибки в решении условий 1) или 2).

2) $\begin{cases} a \geqslant 27; \\ |5x-a| \leqslant x-9; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant 27; \\ 5x-a \leqslant x-9; \\ 5x-a \geqslant -x+9; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant 27; \\ x \leqslant \dfrac{a-9}{4}; \\ x \geqslant \dfrac{a+9}{6}. \end{cases}$

Решения данного неравенства образуют отрезок длиной 1, если $\dfrac{a-9}{4} - \dfrac{a+9}{6} = 1$; отсюда $3a-27-2a-18=12$, $a=57$.

Ответ: $a=3$; $a=57$.

4 балла.
Обоснованно получен правильный ответ.

3. *Ответ*: 15.

4. *Ответ*: 151.

День 31

2.2.3. Показательные неравенства

1*. Укажите наибольшее целое решение неравенства $5^{4-7x} \geqslant 0,2^{10}$.

1

2*. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(0,2)^{9x^2-4x-4} \leqslant (0,2)^{2x-5}.$$

Если такого нет, то в ответе запишите 1.

2

3*. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$3^{2x+1} > 3^x + 2.$$

3

4*. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$64^{-x} \leqslant 0,125.$$

4

5*. Решите неравенство $3^{x+1} + 3^{x-1} \geqslant 21 + 3^x$.

5

Ответы:

Решение показательных неравенств

$a^{f(x)}>b,\ a>1,\ b>0$
Решение: $f(x)>\log_a b$.

$a^{f(x)}>b,\ 0<a<1,\ b>0$
Решение: $f(x)<\log_a b$.

$a^{f(x)}<b,\ a>1,\ b>0$
Решение: $f(x)<\log_a b$.

$a^{f(x)}<b,\ 0<a<1,\ b>0$
Решение: $f(x)>\log_a b$.

$a^{f(x)}>a^{g(x)},\ a>1$
Решение: $f(x)>g(x)$.

$a^{f(x)}>a^{g(x)},\ 0<a<1$
Решение: $f(x)<g(x)$
$a^{f(x)}<a^{g(x)}$,
$a>1$.

1. $5^{4-7x} \geqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$; $5^{4-7x} \geqslant 5^{-10}$.

Функция $y=5^x$ возрастает на всей области определения, т. к. $5>1$, поэтому

$$4-7x \geqslant -10;\quad -7x \geqslant -10-4;\quad -7x \geqslant -14;$$

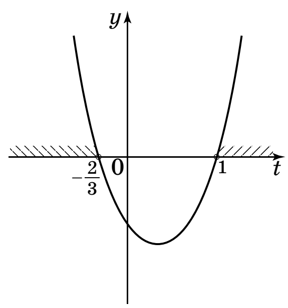
$x \leqslant -14:(-7)$ (знак неравенства меняется, т. к. разделили на отрицательное число его левую и правую части); $x \leqslant 2$. Значит, наибольшее целое решение: 2.
Ответ: 2.

2. Функция $y=0,2^x$ убывает на всей области определения ($0<0,\ 2<1$), поэтому

$$9x^2-4x-4 \geqslant 2x-5;\quad 9x^2-4x-4-2x+5 \geqslant 0;$$

$$9x^2-6x+1 \geqslant 0;\quad (3x-1)^2 \geqslant 0.$$

Полученное неравенство верно при любом значении x, т. е. $x \in R$. Значит, наибольшее решение неравенства указать невозможно.
Ответ: 1.

Критерии проверки решения:	**3.** *Решение*:
1 балл. Выполнены верные преобразования, получены правильные промежуточные значения.	$3\cdot 3^{2x}-3^x-2>0$. Замена: $3^x=t$, тогда $3^{2x}=t^2$. Получим неравенство $3t^2-t-2>0$; $3t^2-t-2=0$; $D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-2)=25$; $t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $t_1=\dfrac{1+\sqrt{25}}{2\cdot 3}=1$; $t_2=\dfrac{1-\sqrt{25}}{6}=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$.
2 балла. Правильно решено квадратное неравенство. Верно записаны, окончательные неравенства для искомой переменной.	Значит, $t<-\dfrac{2}{3}$ или $t>1$. Обратная замена: $3^x<-\dfrac{2}{3}$ нет решения, т. к. $-\dfrac{2}{3}<0$; $3^x>0$ или $3^x>1$; $3^x>3^0$; $x>0$. (Функция $y=3^x$ возрастает на всей области определения, т. к. $3>1$.) 
3 балла Обоснованно получен правильный *ответ*.	Итак, $x>0$; 1 — наименьшее целое решение данного неравенства. *Ответ*: 1.

4. *Ответ*: 1.

5. *Ответ*: $x \geqslant 2$.

День 32

2.2.4. Логарифмические неравенства

1. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 28 с.

1

2. Решите неравенство $\log_{x+6}\left(36 - x^2\right) - \frac{1}{8}\log^2_{x+6}(x-6)^2 \geqslant 4.$

2

3. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 25$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 2{,}3$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 46 с?

3

4. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 300°$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 10 980 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

4

Ответы:

1. Из условия задачи получаем неравенство:

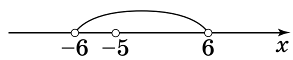
$$1,4\cdot 4\cdot 10^{6}\cdot 5\cdot 10^{-6}\cdot \log_2\frac{12}{U}\geqslant 28;\quad 28\cdot 10^{6-6}\log_2\frac{12}{U}\geqslant 28;$$

$$\left[10^{6-6}=10^{0}=1\right];\ \log_2\frac{12}{U}\geqslant 1;\ \log_2\frac{12}{U}\geqslant \log_2 2.$$

Функция $y=\log_2 x$ возрастает на всей области определения. Поэтому: $\frac{12}{U}\geqslant 2$. ОДЗ: $\frac{12}{U}>0$, $U>0$, тогда: $12\geqslant U$, $U\leqslant 6$. Значит, наибольшее возможное напряжение на конденсаторе равняется 6 кВ.

Ответ: 6.

2.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Выполнены верные преобразования логарифмических выражений. Правильно найдены допустимые значения переменной. Правильно раскрыт модуль выражения при допустимых значениях переменной.	Преобразуем левую часть неравенства, используя свойства логарифмов: $$2\log_{x+6}\left(36-x^2\right)-\frac{4}{8}\log^2_{x+6}\lvert x-6\rvert\geqslant 4.$$ Найдем допустимые значения x для левой части неравенства: $$\begin{cases}36-x^2>0;\\x+6>0;\\x+6\neq 1;\\x-6\neq 0;\end{cases}\begin{cases}(6-x)(6+x)>0;\\x+6>0;\\x\neq -5;\\x\neq 6;\end{cases}\begin{cases}6-x>0;\\x+6>0;\\x\neq -5.\end{cases}\begin{cases}x<6;\\x>-6;\\x\neq -5.\end{cases}$$ Поэтому $-6<x<-5$ или $-5<x<6$.  Значит, $\lvert x-6\rvert=-(x-6)=6-x$ при всех допустимых значениях x.
2 балла. Правильно решено логарифмическое неравенство, указаны возможные решения неравенства.	Отсюда, $2\log_{x+6}\left((6-x)(6+x)\right)-\frac{1}{2}\log^2_{x+6}(6-x)\geqslant 4.$ Разделим обе части неравенства на 2 почленно: $$\log_{x+6}\left((6-x)(6+x)\right)-\frac{1}{4}\log^2_{x+6}(6-x)\geqslant 2;$$ $$\log_{x+6}(6-x)+\log_{x+6}(6+x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+6}(6-x)\geqslant 2;$$ $$-\frac{1}{4}\log^2_{x+6}(6-x)+\log_{x+6}(6-x)-1\geqslant 0.$$ Замена: $\log_{x+6}(6-x)=t$, получим: $-\frac{1}{4}t^2+t-1\geqslant 0;$ $t^2-4t+4\leq 0;\ (t-2)^2\leqslant 0$, отсюда $t=2$. Обратная замена: $\log_{x+6}(6-x)=2;\ (x+6)^2=6-x;\ x^2+12x+36-6+x=0;$ $x^2+13x+30=0;\ \ x_1=-10;\ \ x_2=-3.$
3 балла. Обоснованно получен правильный ответ.	Но $x_1=10$ не удовлетворяет допустимым значениям x: $-6<x<-5$ или $-5<x<6$. *Ответ*: -3.

3. *Ответ*: 6,25.

4. *Ответ*: 3.

День 33

2.2.5. Системы линейных неравенств

1*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x+3}{3} \geqslant 1 - \dfrac{x+1}{6}; \\ 3(x+1) - 2(x-2) \geqslant 3x+3. \end{cases}$

В ответ запишите произведение всех целых решений системы.

1

2*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} |x-2| > |x+3|; \\ x+3 > 0. \end{cases}$

В ответ запишите наименьшее целое ее решение.

2

3*. Решите неравенство для каждого значения a относительно x: $|x-5| < a$.

3

4*. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(2x+1) - 3(x-2) \leqslant 5x-4, \\ \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x-2}{5} \leqslant 2 - \dfrac{5x+1}{15}. \end{cases}$$

В ответ запишите произведение всех ее целых решений.

4

5*. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств:

$$\begin{cases} |x-4| > 5; \\ |x+1| < 7. \end{cases}$$

5

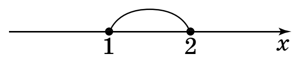
Ответы:

1. Решим каждое неравенство системы отдельно. Первое неравенство почленно умножим на 6 и приведем к простейшему линейному неравенству. Во втором — раскроем скобки и тоже приведем его к простейшему. В ответ выпишем общие решения двух неравенств.

$$\begin{cases} 3(3x+1)-2(x+3) \geqslant 6 \cdot 1-(x+1); \\ 3x+3-2x+4 \geqslant 3x+3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x+3-2x-6 \geqslant 6-x-1; \\ x+7 \geqslant 3x+3; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x \geqslant 8; \\ -2x \geqslant -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

1; 2 — целые решения системы;
$1 \cdot 2 = 2$.
Ответ: 2.



2. Решим отдельно неравенства системы.
1) $|x-2| > |x+3|$.

Так как $|x-2| \geqslant 0$, $|x+3| \geqslant 0$ при всех x, то

$$|x-2|^2 > |x+3|^2; \quad x^2-4x+4 > x^2+6x+9;$$

$$-10x > 5, \quad x < -0,5.$$

2) $x + 3 > 0$, $x > 3$.

Таким образом, $x \in (-3; -0,5)$; -2 — наименьшее целое решение данной системы неравенств.
Ответ: -2.

3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Верно определены отдельные случаи для *a*.	Рассмотрим два случая: $a \leqslant 0$ и $a > 0$. При $a \leqslant 0$ данное неравенство не имеет решений, т. к. модуль числа — неотрицательное число, а в условии дано строгое неравенство.
2 балла. Верно рассмотрены случаи для а и получена часть верного ответа.	Если $a > 0$, то данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x-5 < a, \\ x-5 > -a; \end{cases}$
3 балла. Получено верное решение, но не выписан итоговый ответ.	$\begin{cases} x < a+5, \\ x > -a+5; \end{cases}$ т. е. $-a+5 < x < a+5$.
4 балла. Обоснованно получен верный ответ.	*Ответ*: при $a \leqslant 0$ нет решений; при $a > 0$ $-a+5 < x < a+5$.

4. *Ответ*: 12.

5. *Ответ*: 0.

День 34

2.2.6. Системы неравенств с одной переменной
2.2.7. Равносильность неравенств, систем неравенств

1*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 - 16 \leqslant 0; \\ x^2 + 3x > 0. \end{cases}$

В ответ запишите сумму всех целых решений системы.

1

2*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + x > 0; \\ |x| \leqslant 3. \end{cases}$

В ответ запишите наибольшее целое решение.

2

3*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 - 25 \leqslant 0; \\ x(x+4) > 0. \end{cases}$

В ответ запишите сумму всех целых ее решений.

3

4*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x + 7 \geqslant 0; \\ |x - 3| < 2. \end{cases}$

В ответ запишите наименьшее целое ее решение.

4

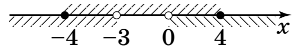
5*. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(x - 5a)(x - a - 5) < 0$ выполняется при всех значениях x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 5$.

5

Ответы:

1. Преобразуем неравенства системы:

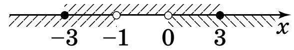
$$\begin{cases} x^2 \leqslant 16; \\ x(x+3) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4; \\ x < -3 \text{ или } x > 0. \end{cases}$$



Получим: $-4 \leqslant x < -3$ или $0 < x \leqslant 4$.
Целые решения системы: -4; 1; 2; 3; 4.
Их сумма: $-4 + 1 + 2 + 3 + 4 = 6$.
Ответ: 6.

2.

$$\begin{cases} x(x+1) > 0; \\ -3 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$



Значит, $-3 \leqslant x < -1$ или $0 < x \leqslant 3$. Поэтому 3 — наибольшее целое решение данной системы неравенств.
Ответ: 3.

3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Правильно решено данное неравенство относительно переменной *x*.	$(x-5a)(x-(a+5)) < 0$. Решением данного неравенства является один из интервалов: $(5a; a+5)$ или $(a+5; 5a)$.
2 балла. Проведены верные рассуждения, приводящие к правильному ответу. Решена совокупность систем неравенств для параметра *a*.	По условию задачи каждый из этих интервалов должен содержать отрезок $[1; 5]$. Следовательно, искомые значения параметра a — это решение совокупности системы неравенств: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5a < 1; \\ a+5 > 5; \end{cases} \\ \begin{cases} a+5 < 1; \\ 5a > 5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < \frac{1}{5}; \\ a > 5-5; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1-5; \\ a > 5:5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0,2; \\ a > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a < -4; \\ a > 1. \end{cases} \end{array}\right.$
3 балла. Обоснованно получен верный ответ.	Вторая система неравенств не имеет решения. Решением первой системы неравенств являются следующие значения параметра a: $0 < a < 0,2$. *Ответ*: $0 < a < 0,2$.

4. *Ответ*: 10.

5. *Ответ*: 2.

День 35

2.2.8. Метод интервалов

1*. Решите неравенство методом интервалов. В ответ запишите наибольшее целое решение:

$$\frac{5x\left(4x^2-20x+25\right)(1-x)^3}{x^2-2x-3} \geqslant 0.$$

1

2*. Решите неравенство:

$$\frac{x^2-5x-36}{\sqrt{x^2-4x-12}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+10x+25}-3}{\sqrt{11-x}-2}\right)^4 \leqslant 0.$$

2

3*. Решите неравенство: $x^2-5x+6>0.$

3

4*. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2+x-12<0; \\ -x^2+2x+15 \geqslant 0. \end{cases}$

4

Ответы:

При решении неравенств методом интервалов определяется знак функции в крайнем правом интервале, а дальше (влево) знаки функции в интервалах чередуются.
Но если $(2x-5)^2$ (2 — четная степень), то при переходе через точку $x=2{,}5$ функция знак не меняет.

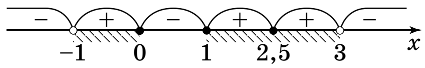
1. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{5x(2x-5)^2(1-x)^3}{(x-3)(x+1)}\geqslant 0.\ \text{ОДЗ: } (x-3)(x+1)\neq 0,$$

$x\neq 3;\ \ x\neq -1.\ \ 5x(2x-5)^2(1-x)^3(x-3)(x+1)\geqslant 0.$

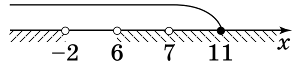
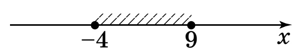
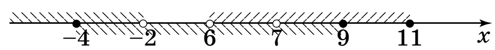
Нули функции $y=5x(2x-5)^2(1-x)^3(x-3)(x+1)$:

$x=0;\ 2{,}5;\ 1;\ 3;\ -1.$



Отметим найденные нули на ОДЗ и определим знак функции $y(x)$ в каждом полученном интервале.
Очевидно: $x\in(-1;\,0]\cup[1;\,3)$. $x=2$ — наибольшее целое решение неравенства.
Ответ: 2.

2.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Правильно выполнены преобразования. Верно найдены все ограничения для переменной *x*.	ОДЗ: $\begin{cases}11-x\geq 0;\\ \sqrt{11-x}\neq 2;\\ x^2+10x+25\geqslant 0;\\ x^2-4x-12>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\leqslant 11;\\ 11-x\neq 4;\\ (x+5)^2\geqslant 0;\\ (x-6)(x+2)>0;\end{cases}$ [$(x+5)^2\geqslant 0$ при всех значениях x], $\begin{cases}x\leqslant 11;\\ x\neq 7;\\ x<-2 \text{ или } x>6.\end{cases}$  Поэтому $x<-2$ или $6<x<7$ или $7<x\leqslant 11$.
2 балла. Учтены различные случаи в решении задачи. Найдена верно часть решения неравенства.	Рассмотрим следующие случаи: 1) $\sqrt{x^2+10x+25}=3$, тогда $\sqrt{(x+5)^2}=3$; $\lvert x+5\rvert=3$; $x+5=3$; $x=-2$ или $x+5=-3$; $x=-8$. $x=-2$ не входит в ОДЗ, значит, $x=-8$ является решением неравенства. 2) $\sqrt{x^2+10x+25}\neq 3$ Разделим обе части данного неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}-3}{\sqrt{11-x}-2}\right)^4$, получим $\dfrac{x^2-5x-36}{\sqrt{x^2-4x-12}}\leqslant 0$; $\sqrt{x^2-4x-12}>0$,  следовательно, $x^2-5x-36\leqslant 0$. $x^2-5x-36=0$; $x_1=-4$; $x_2=9$.
3 балла. Обоснованно получен верный ответ.	Учитывая все ограничения (область допустимых значений),  получим: $x\in[-4;\,-2)\cup(6;\,7)\cup(7;\,9]$. *Ответ*: $x=-8$; $-4\leqslant x<-2$; $6<x<7$; $7<x\leqslant 9$.

3. *Ответ*: $x<2$ или $x>3$.

4. *Ответ*: $-3\leqslant x<3$.

День 36

2.2.9. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

1*. Изобразите на координатной плоскости решение неравенства $|x| + |y| < 1$.

2*. Решите неравенство относительно x для каждого значения a.

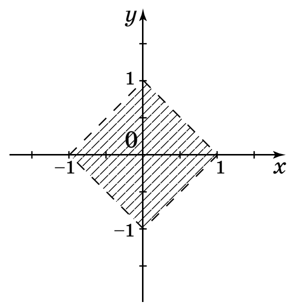
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant a.$$

3*. Изобразите на координатной плоскости решение неравенства $\log_3(x-2) < 2$.

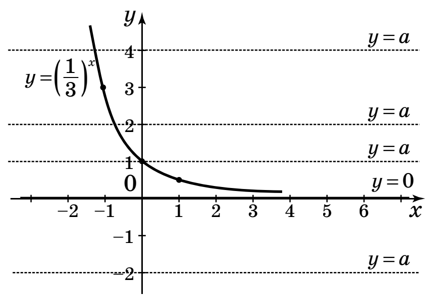
4*. При каких значениях a неравенство $(x+2)^2 \leqslant a$ имеет единственное решение?

Ответы:

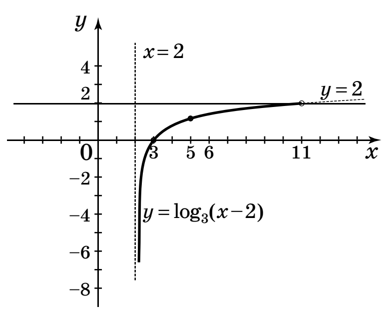
1. Уравнение $|x|+|y|=1$ задает на координатной плоскости квадрат с центром в точке $(0;\,0)$, диагонали которого лежат на осях Ox и Oy.
Так как неравенство строгое ($<$), то границы квадрата не являются его решением.
Изобразим решение данного неравенства на координатной плоскости.



2.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Правильно представлено графическое решение неравенства.	Изобразим на координатной плоскости графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\left(0<\frac{1}{3}<1\right.$, значит, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает на всей области определения) и $y=a$ (прямая, параллельная оси x). 
2 балла. Частично найдено верное решение задачи.	Очевидно, что при $a\leqslant 0$ данное неравенство всегда выполняется, так как график функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ выше оси x.
3 балла. Правильно рассмотрен другой случай решения.	При $a>0$ данное неравенство имеет следующие решения: $x<\log_{\frac{1}{3}}a$, $x<\log_{3^{-1}}a$, $x<-\log_3 a$.
4 балла. Обоснованно получен верный ответ.	*Ответ*: при $a\leqslant 0$ бесконечно много решений (т. е. $x\in R$); при $a>0$, $x<-\log_3 a$.

3. *Ответ*:



4. *Ответ*: $a=0$.

День 37

3.1. Определение и график функции

3.1.1. Функция. Область определения

3.1.2. Множество значений

1*. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$. В ответ запишите количество целых чисел из промежутка $[-3; 3]$ области определения.

1

2*. Найдите множество значений функции $y = x^2 - 5$. В ответ запишите наименьшее отрицательное число, принадлежащее области значений.

2

3*. При каких значениях аргумента x_1 и x_2 значение функции $y = x^2 + 6x - 2$ равно 5? В ответ запишите произведение $x_1 \cdot x_2$.

3

4*. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}.$$

4

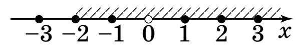
5*. Найдите множество значений функции $y = |x| + 3$. В ответ запишите наименьшее положительное число из множества значений.

5

Ответы:

1. Область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$ задается ограничениями:
а) $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$, поскольку под знаком квадратного корня не может стоять отрицательное число;
б) $x \neq 0$, поскольку знаменатель дроби не может быть равен нулю.

$$\begin{cases} x \geqslant -2; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



Очевидно, что промежутку $[-3; 3]$ из области определения данной функции принадлежат числа: -2; -1; 1; 2; 3, т. е. 5 чисел.
Ответ: 5.

2. Составим уравнение: $x^2 - 5 = a$, которое равносильно уравнению $x^2 = a + 5$. Это уравнение имеет решение, если $a + 5 \geqslant 0$, т. е. при $a \geqslant -5$. Все эти числа и составят множество значений функции $E(f) = [-5; +\infty)$. Наименьшим отрицательным числом, принадлежащем области значений, является -5.

Ответ: -5.

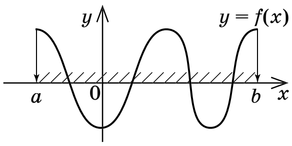
3. Если значение функции $y = x^2 + 6x - 2$ равно 5, то $x^2 + 6x - 2 = 5$, т. е. $x^2 + 6x - 7 = 0$. Очевидно, что находить x_1 и x_2 отдельно не обязательно, поскольку в ответ надо записать $x_1 \cdot x_2$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -7$.

Ответ: -7.

4. *Ответ*: 5.

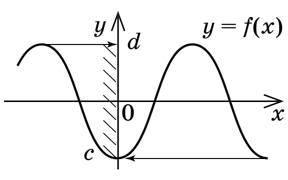
5. *Ответ*: 3.

Областью определения $D(f)$ называют множество значений, которые может принимать x.
Для того чтобы найти $E(f)$, необходимо найти все значения a, для которых $f(x)=a$ имеет единственное решение.



$D(f)=[a;\ b]$

Областью значений $E(f)$ называют множество значений $f(x)$, которые она может принимать при $x \in D(f)$.
Областью определения функции, заданной формулой $y=f(x)$, называют множество значений x, при которых формула имеет смысл (все действия, указанные формулой, можно выполнить).

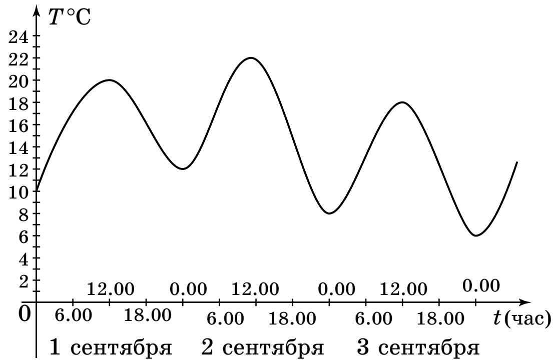


$E(f)=[c;\ d]$

День 38

3.1.3. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах

1*. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах.



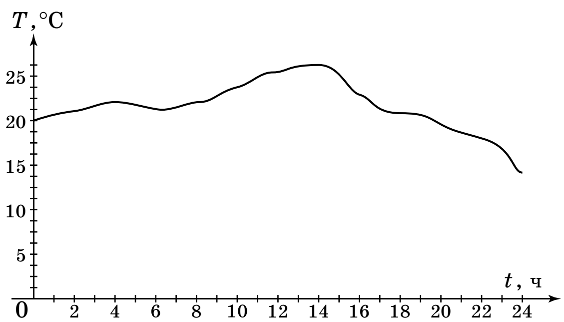
Определите по графику наибольшую температуру воздуха 3 сентября.

2*. Воду некоторое время нагревали. Зависимость ее температуры t (в °C) от времени τ (в минутах) задана так:

$$t(\tau) = \begin{cases} 10\tau + 40, \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant 6; \\ 100, \text{если } 6 < \tau \leqslant 10; \\ -2\tau + 120, \text{если } 10 < \tau \leqslant 15. \end{cases}$$

Найдите начальную t_0 и конечную t_k температуру воды. В ответ запишите их сумму.

3*. На графике показано изменение температуры воздуха 25 мая. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах.



В котором часу температура воздуха была наибольшей?

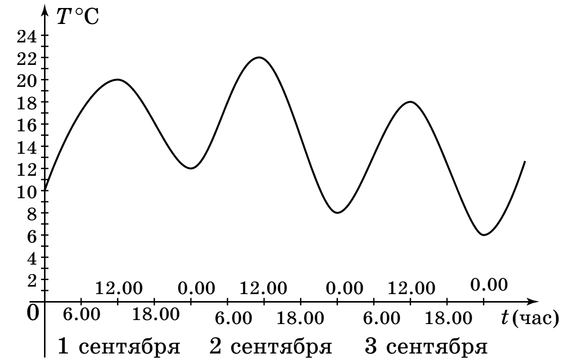
4*. Тело движется прямолинейно. Зависимость пройденного им пути S (в метрах) от времени t (в секундах) задано так:

$$S(t) = \begin{cases} 2{,}5t, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ 5, \text{ если } 2 < t \leqslant 4; \\ 3t - 7, \text{ если } 4 < t \leqslant 6 \end{cases}$$

Найдите $S(6)$.

Ответы:

1.



Очевидно, что наибольшая температура воздуха 3 сентября составила 18 °C.

Ответ: 18.

2. Очевидно, что начальная температура воды t_0 будет в момент времени $\tau = 0$ мин, т. е. эту температуру определим по формуле

$$t_0 = 10°\tau + 40° = 10° \cdot 0 + 40° = 40°.$$

Конечная температура воды $t_к$ будет в момент времени $\tau = 15$ мин, определим ее по формуле

$$t_к = -2°\tau + 120° = -2 \cdot 15 + 120° = -30° + 120° = 90°.$$

$$t_0 + t_к = 40° + 90° = 130°.$$

Ответ: 130.

3. *Ответ*: 14.

4. *Ответ*: 11.

День 39

3.1.4. Обратная функция. График обратной функции

1*. Найдите $g(2)$, если $g(x)$ — функция, обратная к функции $y = \dfrac{1}{1-x}$.

1

2*. Найдите $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{5}\right)$.

2

3*. Найдите $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$.

3

4*. Найдите $g(3)$, если $g(x)$ — обратная функция к $y = 2x - 5$.

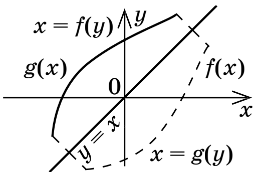
4

5*. Найдите $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)$.

5

Ответы:

Функцию g называют *обратной для функции* f, если каждому y из области значений функции f функция g ставит в соответствие одно значение x из области определения функции f, такое, что $y=f(x)$. Следовательно, если $y=f(x)$, то $x=g(y)$.



Функции f и g называют *взаимно обратными*.
Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

1. Область определения функции $y = \dfrac{1}{1-x}$: $x \neq 1$. Тогда из равенства $y = \dfrac{1}{1-x}$ имеем:

$$y - xy = 1; \quad xy = y - 1; \quad x = \frac{y-1}{y}.$$

Обозначаем аргумент через x, а функцию — через $g(x)$, получаем:

$$g(x) = \frac{x-1}{x}; \quad g(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

2. Пусть $\arcsin\frac{1}{5} = \varphi$, тогда по определению арксинуса получаем, что $\sin\varphi = \frac{1}{5}$; $\sin\varphi = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

3. Пусть $\arcsin\frac{4}{5} = \varphi$. По определению арксинуса получаем, что $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Учитывая, что $\cos\varphi \geqslant 0$, имеем:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

4. *Ответ*: 4.

5. *Ответ*: 3.

День 40

3.1.5. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

1*. При каких значениях параметра a уравнение имеет три корня?

$$\left(a+4x-x^2-4\right)\left(a-1-|x-2|\right)=0$$

1

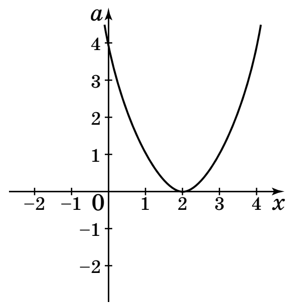
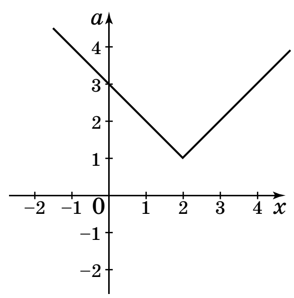
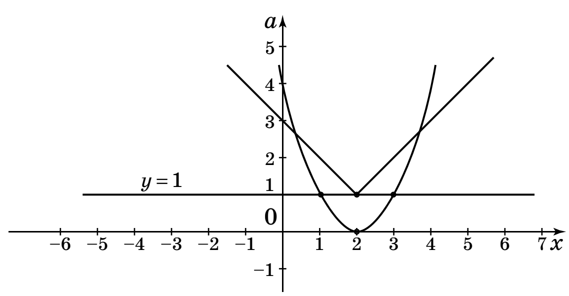
2*. Укажите параллельный перенос графика функции $y=(x+3)^2+5$, полученного из графика $y=x^2$, на «m» единиц вдоль оси x и «n» единиц вдоль оси y. В ответ запишите «$m+n$».

2

3*. Укажите наименьшее целое число, которое входит в множество значений функции $y=|x+3|-4$.

3

Ответы:

Критерии проверки решения:	**1.** *Решение*:
1 балл. Сделан верный переход к совокупности уравнений и предложен ход дальнейшего решения (графический или аналитический).	Уравнение $\left(a+4x-x^2-4\right)\left(a-1-\lvert x-2\rvert\right)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} a+4x-x^2-4=0; \\ a-1-\lvert x-2\rvert=0. \end{array}\right.$ Рассмотрим графики функций $\left[\begin{array}{l} a=x^2-4x+4; \\ a=\lvert x-2\rvert+1 \end{array}\right.$ в координатной плоскости $x0a$.
2 балла. Верно решено одно из уравнений совокупности или построен график соответствующей функции.	1) Построим график функции $a=x^2-4x+4$ или $a=(x-2)^2$. Это парабола ветвями вверх $a=x^2$, параллельно перенесенная по оси x на 2 единицы вправо. 
3 балла. Верно рассмотрены оба уравнения совокупности, в результате чего получена часть верного ответа.	2) Построим график функции $a=\lvert x-2\rvert+1$. Это график функции $a=\lvert x\rvert$, который перенесли параллельно по оси x на 2 единицы вправо и по оси a на 1 единицу вверх. 
4 балла. Обоснованно получен верный ответ.	3) Построим полученные графики в одной системе координат.  Очевидно, что исходное уравнение имеет ровно три корня, если $a=1$. *Ответ*: 1.

2. *Ответ*: 2.

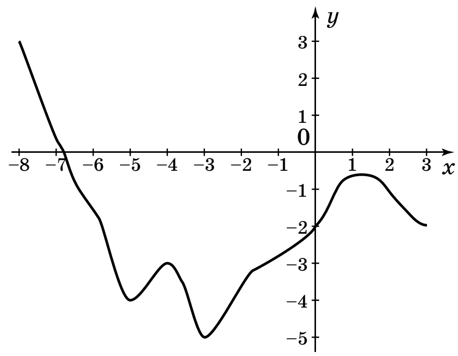
3. *Ответ*: -4.

День 41

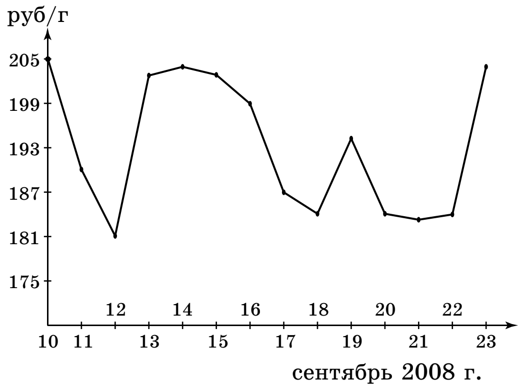
3.2. Элементарное исследование функций

3.2.1. Монотонность. Возрастание и убывание функции

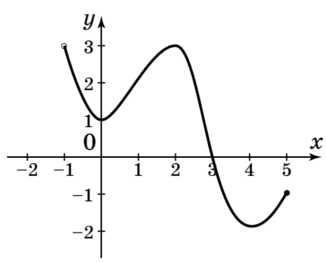
1*. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Определите количество промежутков, на которых функция возрастает.



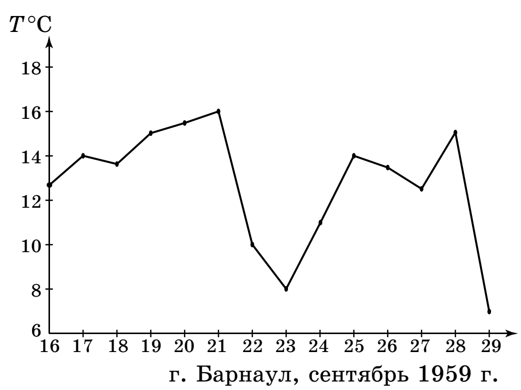
2*. На рисунке показано изменение цен на палладий в период с 10 по 23 сентября 2008 года в рублях за грамм. Определите по графику, сколько дней из данного периода цена на палладий снижалась.



3*. На рисунке изображен график функции $f(x)$ на интервале $(-1; 5)$. Определите количество промежутков, на которых функция убывает.

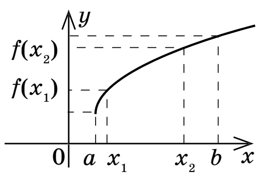


4*. На рисунке показано изменение средней дневной температуры в Барнауле во второй половине сентября 1959 г. Определите по графику, сколько дней из данного периода температура повышалась.



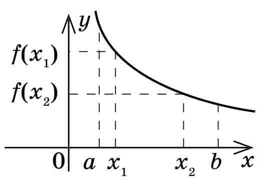
Ответы:

Возрастающая функция



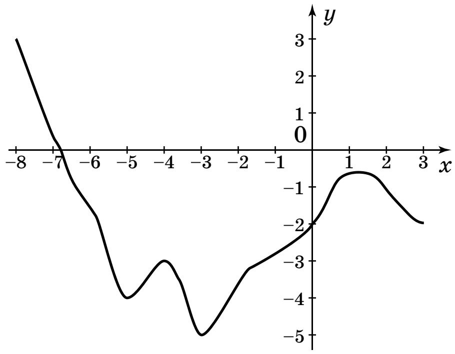
Если для любых x_1 и x_2 интервала $(a; b)$ из условия $x_1 < x_2$ следует $y_1 < y_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$. Если функция $y = f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ возрастает, то из условия $f(x_1) < f(x_2)$ следует $x_1 < x_2$.

Убывающая функция



Если для любых x_1 и x_2 интервала $(a; b)$ из условия $x_1 < x_2$ следует $y_1 > y_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Если функция $y = f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ убывает, то из условия $f(x_1) > f(x_2)$ следует $x_1 < x_2$.

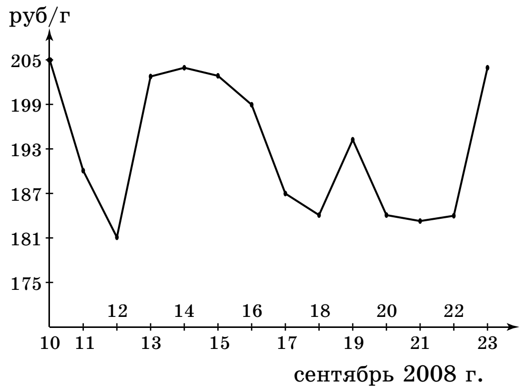
1.



Очевидно, что функция $f(x)$ возрастает при $x \in [-5; -4]$ и $[-3; 1]$, то есть таких промежутков два.

Ответ: 2.

2.



По графику видно, что цена снижалась с 10 по 12 сентября (2 дня), с 14 по 18 сентября (еще 4 дня) и с 19 по 21 сентября (также 2 дня), то есть всего $2 + 4 + 2 = 8$ дней.

Ответ: 8.

3. *Ответ*: 2.

4. *Ответ*: 7.

День 42

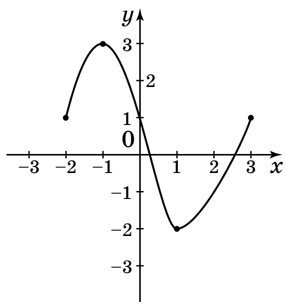
3.2.2. Четность, нечетность
3.2.3. Периодичность, ограниченность
3.2.4. Ограниченность функций

1*. Функцию $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ представьте в виде $f(x) = g(x) + p(x)$, где $g(x)$ — четная функция, $p(x)$ — нечетная. В ответ запишите значение выражения $g(-1) + 2p(2)$.

1

2*. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и является периодической с наименьшим положительным периодом 5. На рисунке изображен график этой функции на отрезке $[-2; 3]$.

Вычислите $f(6)$.



2

3*. Найдите $\operatorname{ctg}(-585^\circ)$, пользуясь периодичностью, четностью или нечетностью функции.

3

4*. Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \operatorname{tg} 2\pi x$.

4

5*. Пользуясь периодичностью, четностью или нечетностью функции, найдите $\sin\left(-\dfrac{21\pi}{2}\right)$.

5

Ответы:

Четная функция
$f(-x)=f(x)$,
$x \in D(f)$.

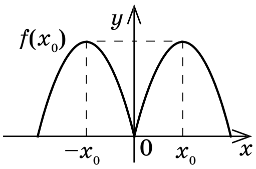


График симметричен относительно оси *Oy*

Нечетная функция
$f(-x)=-f(x)$,
$x \in D(f)$.

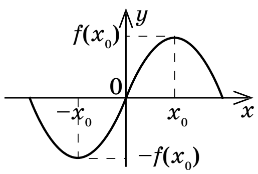
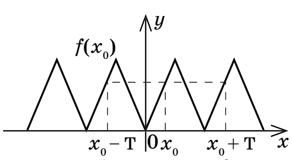


График симметричен относительно точки *O* (0; 0)

Периодические функции
$f(x-T)=f(x+T)=f(x)$,
$x \in D(f)$, $T>0$



Если функция $y=f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то функция $y=f(kx+b)$ имеет наименьший положительный период $\dfrac{T}{|k|}$

1. Функцию $f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций можно представить только следующим образом:

$g(x)=2x^2+2$, где $g(x)$ — четная функция, поскольку $g(-x)=g(x)$;

$p(x)=x^3-x$, где $p(x)$ — нечетная функция, поскольку $p(-x)=-p(x)$.

Найдем значение выражения $g(-1)+2p(2)$:

$g(-1)=2\cdot(-1)^2+2=4;\quad 2p(2)=2\cdot\left(2^3-2\right)=12.$

Тогда $g(-1)+2p(2)=4+12=16.$

Ответ: 16.

2. Функция $f(x)$ — периодическая с периодом $T=5$. Поэтому $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$.

Тогда $f(6)=f(6-5)=f(1)=-2$.
Ответ: -2.

3. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ нечетная, поэтому

$\operatorname{ctg}(-585^\circ)=-\operatorname{ctg}585^\circ$.

Период $T=180^\circ$, поэтому:

$-\operatorname{ctg}585^\circ=-\operatorname{ctg}(540^\circ+45^\circ)=-\operatorname{ctg}(180^\circ\cdot3+45^\circ)=$

$=-\operatorname{ctg}45^\circ=-1.$

Ответ: -1.

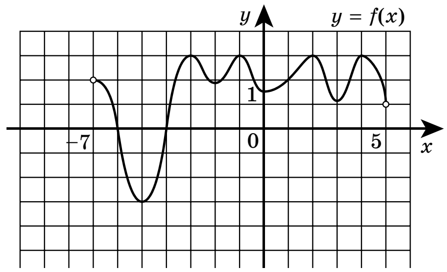
4. *Ответ*: $T=\dfrac{\pi}{2\pi}=\dfrac{1}{2}=0,5.$

5. *Ответ*: -1.

День 43

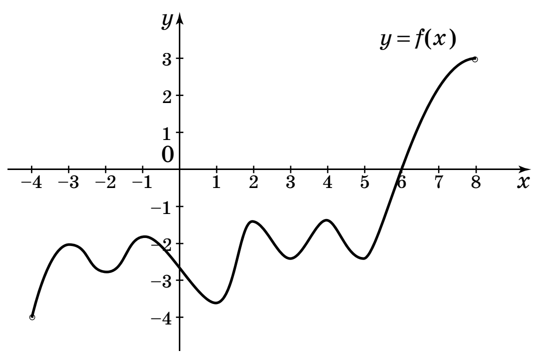
3.2.5. Точки экстремума функции

1. График функции $y = f(x)$ определен на интервале $(-7; 5)$. Найти сумму точек экстремума функции.



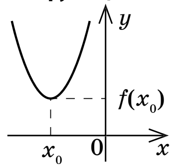
2*. Определите точку максимума функции $y = -2x^2 + 8x - 9$.

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;8)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

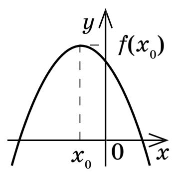


4*. Определите точку минимума функции $y = x^2 + 4x + 3$.

Экстремумы (максимумы и минимумы) функции



x_0 — точка минимума,
$f(x_0)$ — минимум
$f(x) > f(x_0)$



x_0 — точка максимума,
$f(x_0)$ — максимум
$f(x) < f(x_0)$

Ответы:

1. По рисунку видно, что точками максимума будут:

$$x_1 = -3;\quad x_2 = -1;\quad x_3 = 2;\quad x_4 = 4.$$

Точки минимума:

$$x_1 = -5;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = 0;\quad x_4 = 3.$$

Таким образом, сумма точек экстремума:

$$-3 + (-1) + 2 + 4 + (-5) + (-2) + 0 + 3 = -3.$$

Ответ: −2.

2. Функция $y = -2x^2 + 8x - 9$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Максимумом данной функции является вершина параболы.

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2.$$

Это значение и является точкой максимума.
Ответ: 2.

3. *Ответ*: 9.

4. *Ответ*: −2.

День 44

3.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции

1*. Найдите наибольшее значение функции $y = \cos 2x - \cos x$.

2*. Определите стороны a и b прямоугольника с периметром 20 см, имеющего наибольшую площадь. В ответ запишите $a + b$.

3*. Найдите наименьшее значение функции $y = \cos 2x + \cos x$.

4*. При каком значении x функция $y = 2x^2 - 4x + 6$ принимает наименьшее значение?

Ответы:

1. Воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, тогда данную функцию можно записать в виде:

$$y = 2\cos^2 x - 1 - \cos x.$$

Учитывая, что $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, вычислим значение функции при $\cos x = 1$:

$$y = 2 - 1 - 1; \quad y = 0.$$

При $\cos x = -1$ получаем $y = 2\cdot(-1)^2 - 1 - (-1) = 2$.
Очевидно, что наибольшим значением функции будет 2.
Ответ: 2.

2. Пусть одна сторона прямоугольника — x см, тогда другая сторона равна $(10 - x)$ см, а площадь $S = x\cdot(10 - x)$ или $S = 10x - x^2$ см^2.
Выделим полный квадрат в двучлене $10x - x^2$:

$$10x - x^2 = -x^2 + 10x = -\left(x^2 - 10x\right) =$$

$$= -\left(x^2 - 10x + 25 - 25\right) = -(x-5)^2 + 25.$$

Заметим, что выражение $-(x-5)^2 < 0$ при $x \neq 5$. Тогда сумма $-(x-5)^2 + 25$ принимает наибольшее значение при $x = 5$. Значит, площадь будет наибольшей, когда стороны прямоугольника $a = 5$ и $b = 10 - 5 = 5$, т. е. прямоугольник является квадратом. Таким образом, $a + b = 5 + 5 = 10$.

Ответ: 10.

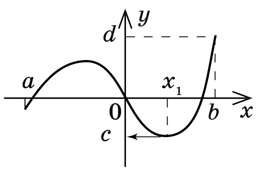
3. *Ответ*: 0.

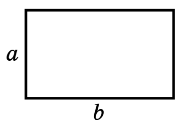
4. *Ответ*: 1.

Наибольшее и наименьшее значение функции:

$\max\limits_{[ab]} f(x) = f(b) = d,$

$\min\limits_{[ab]} f(x) = f(x_1) = c$





Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме соседних сторон:

$$P = 2(a+b).$$

Площадь прямоугольника равна произведению его сторон:

$$S = ab.$$

День 45

3.3. Основные элементарные функции

3.3.1. Линейная функция, ее график

1*. Решите уравнение $ax + \dfrac{2|x|}{x} = a + 2.$

2*. На рисунке изображен график функции $y = kx + b$. Определите по рисунку k и b. В ответ запишите $k + b$.

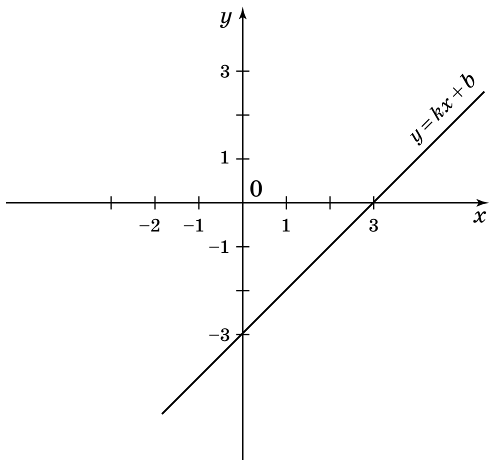
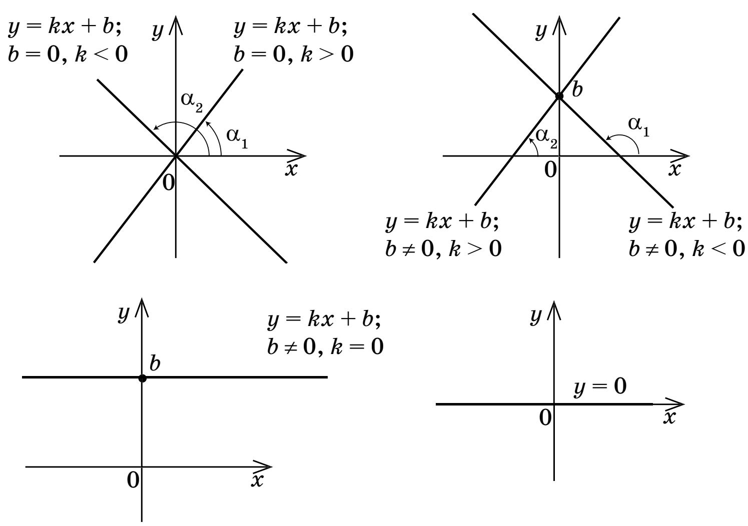


График функции $y = kx + b$ (прямая)



Свойства функции $y = kx + b$

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = R$, если $k \neq 0$; $E(y) = \{b\}$, если $k = 0$.
3. Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная; если $k = 0$, $b \neq 0$, то функция четная; если $b = 0$, $k \neq 0$, то функция нечетная; если $k = 0$, $b = 0$, то функция и четная, и нечетная.
4. Если $k > 0$, то функция возрастает; если $k < 0$, то функция убывает; если $k = 0$, то функция постоянная.
5. $k = \operatorname{tg}\alpha$, α — угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси Ox (угол отсчитывается от дополнительного направления оси Ox против хода часовой стрелки).
6. Если $k \neq 0$, то точек экстремумов нет; если $k = 0$, то все точки $x \in R$ являются точками экстремумов.

Ответы:

1.

Критерии проверки решения:	*Решение*:

Решение:

Перепишем уравнение в виде $ax + \frac{2|x|}{x} - 2 = a.$

Рассмотрим функции $y = a$ и $y = ax + \frac{2|x|}{x} - 2.$

Очевидно, что при $x > 0$ $y = ax + \frac{2x}{x} - 2;$ $y = ax$ — линейная функция вида $y = kx + b,$ где $k = a;$ $b = 0.$

При $x < 0$ $y = ax - \frac{2x}{x} - 2;$ $y = ax - 4.$

Это линейная функция $y = kx + b,$ где $k = a$ и $b = -4.$

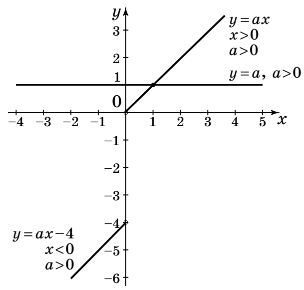
Получаем: $y = ax + \frac{2|x|}{x} - 2 = \begin{cases} ax, x > 0; \\ ax - 4, x < 0. \end{cases}$

Критерий: 1 балл.
Верно рассмотрены случаи $x > 0$ и $x < 0$.

Построим график этой функции совместно с $y = a$ для случаев, когда $a > 0,$ $a < 0$ и $a = 0.$

1) $a > 0.$

При $a > 0$ уравнение имеет один корень $ax = a;$ $x = 1.$



Критерий: 2 балла.
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев $a > 0$, $a < 0$ и $a = 0$.

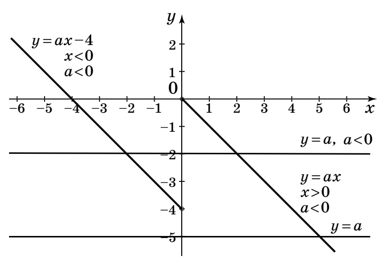
2) $a < 0.$

Очевидно, что при $-4 < a < 0$ уравнение имеет 2 корня:

$ax = a;$ или $ax - 4 = a;$

$x_1 = 1$ $\quad ax = a + 4;$

$x_2 = \frac{a + 4}{a}.$

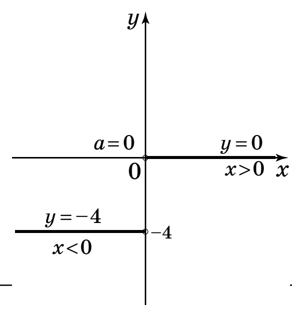


Если $a \leqslant -4,$ то уравнение имеет один корень: $ax = a;$ $x = 1.$

3) $a = 0.$

$$y = \begin{cases} 0; x > 0; \\ -4; x < 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет бесчисленное множество корней, т. е. $x \in (0; +\infty).$



Критерий: 3 балла.
Верно рассмотрены случаи $a > 0$, $a < 0$ и $a = 0$, но решение содержит ошибку или недостаточно обосновано.

Ответ: 1) $x = 1$ при $a \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty);$ 2) $x_1 = 2;$ $x_2 = \frac{a + 4}{a}$ при $a \in (-4; 0);$ 3) $x \in (0; +\infty)$ при $a = 0.$

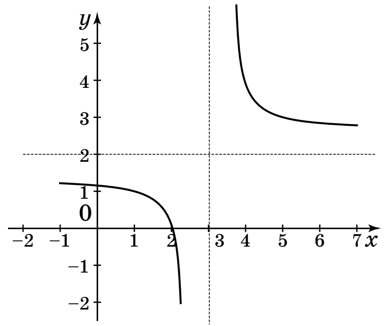
Критерий: 4 балла.
Обоснованно получен правильный ответ.

2. *Ответ*: -2.

День 46

3.3.2. Обратно пропорциональная зависимость и ее график

1*. На рисунке схематично изображен график функции $y = \dfrac{2}{x+a} + b$. Определите a и b. В ответ запишите $a \cdot b$.



1

2*. Определите абсциссу точки пересечения графика

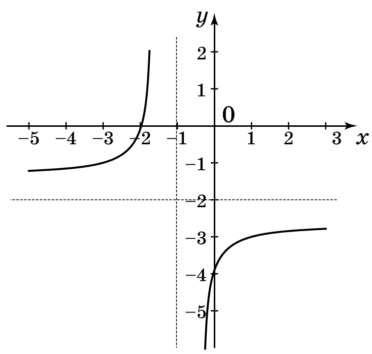
$y = -\dfrac{5}{x+1} - 2$ с осью Ox.

2

3*. В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объем V (литров) газа вычисляется по формуле $V = \dfrac{6}{p}$, где p — давление (в атмосферах). Найдите объем, занимаемый газом при давлении 12 атм.

3

4*. На рисунке схематично изображен график $y = -\dfrac{2}{x+a} + b$. Определите по рисунку a и b. В ответ запишите $a + b$.



4

5*. Определите ординату точки пересечения графика $y = -\dfrac{5}{x+1} - 2$ с осью ординат.

5

Ответы:

1. График этой функции получен при перемещении графика $y = \dfrac{2}{x}$ вдоль оси Ox вправо на 3 единицы и вдоль оси Oy вверх на 2 единицы, т. е. это график функции $y = \dfrac{2}{x-3} + 2$.

Значит, $a = -3$; $b = 2$; $a \cdot b = -3 \cdot 2 = -6$.

Ответ: -6.

2. Если график функции пересекает ось Ox, значит, ордината этой точки равна нулю, т. е. $y = 0$.

$$0 = -\frac{5}{x+1} - 2;\quad \frac{5}{x+1} = -2;\quad x + 1 = -2,5;\quad x = -3,5.$$

Ответ: $-3,5$.

3. Очевидно, что если $V = \dfrac{6}{p}$ и при этом $p = 12$ атм, то

$$V = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ (л)}.$$

Ответ: $0,5$.

4. *Ответ*: $a = 1$; $b = -2$; $a + b = -1$.

5. *Ответ*: -7.

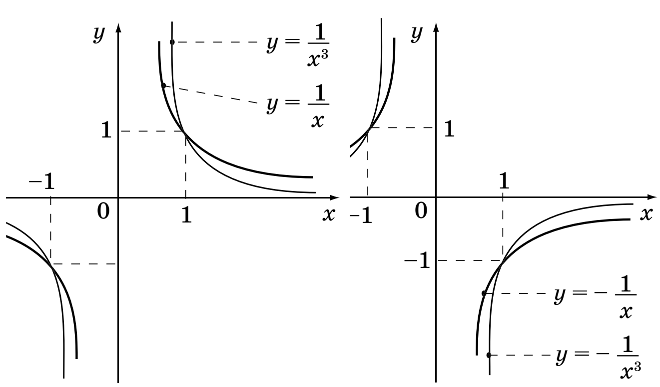
Свойства функции $y = \dfrac{k}{x^{2n+1}}$, $n \in N$

1. $D(y)$: $x \neq 0$.
2. $E(y)$: $y \neq 0$.
3. Функция нечетная:

$$\frac{k}{(-x)^{2n+1}} = -\frac{k}{x^{2n+1}}.$$

4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: если $k > 0$, то $y < 0$ для $x \in (-\infty; 0)$ и $y > 0$ для $x \in (0; +\infty)$; если $k < 0$, то $y < 0$ для $x \in (0; +\infty)$ и $y > 0$ для $x \in (-\infty; 0)$.
6. Промежутки монотонности: если $k > 0$, то функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$; если $k < 0$, то функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.
7. Экстремумов нет.

График функции $y = \dfrac{k}{x^{2n+1}}$, $n \in N$



День 47

3.3.3. Квадратичная функция и ее график

1*. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} -x^2 + y = a; \\ x - y^2 = a \end{cases}$$

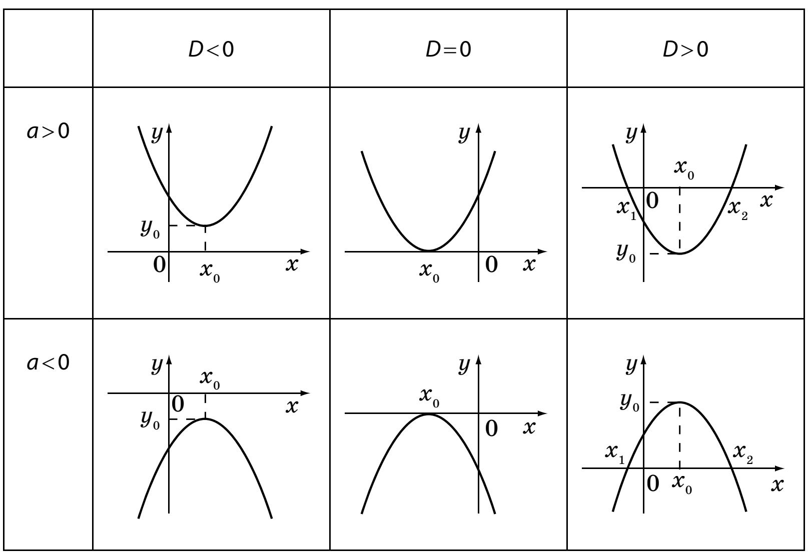
в зависимости от параметра a?

2*. Найдите ординату вершины параболы $y = x^2 + 4x + 1$.

3*. Найдите ординату точки пересечения параболы

$y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 2x - 3$ с осью Oy.

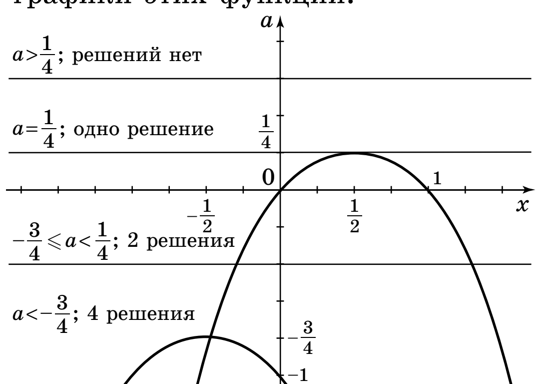
График функции ax^2+bx+c, $a\neq0$ (парабола)



Свойства функции $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$

1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=[y_0;+\infty)$, если $a>0$,
   $E(y)=(-\infty;y_0]$, если $a<0$,
   где $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$,
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
3. Если $b=0$, то функция четная; если $b\neq0$, то функция ни четная, ни нечетная.
4. Если $a>0$, то функция возрастает при $x\in[x_0;+\infty)$, убывает при $x\in(-\infty;x_0]$; если $a<0$, то функция возрастает при $x\in(-\infty;x_0]$, убывает при $x\in[x_0;+\infty)$,
   где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
5. Точка минимума, если $a>0$:
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
   точка максимума, если $a<0$:
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Ответы:

Критерии проверки решения:	**1.** *Решение*:
1 балл. Верно получена совокупность уравнений относительно *a* или сделана попытка аналитического решения.	Из первого уравнения выразим $y = x^2 + a$, подставим во второе уравнение: $x - \left(x^2 + a\right)^2 = a$; $x - x^4 - 2ax^2 - a^2 = a$. Запишем уравнение как квадратное относительно a: $$a^2 + \left(2x^2 + 1\right) \cdot a + x^4 - x = 0.$$
2 балла. Верно рассмотрен один из случаев расположения параболы и получена часть верного ответа.	Решим его относительно a: $D = \left(2x^2 + 1\right)^2 - 4 \cdot \left(x^4 - x\right) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x = \left(2x + 1\right)^2$; $$a_1 = \frac{-2x^2 - 1 + 2x + 1}{2} = -x^2 + x;$$ $$a_2 = \frac{-2x^2 - 1 - 2x - 1}{2} = -x^2 - x - 1.$$
3 балла. Рассмотрены оба случая расположения парабол в системах *xOa* или *xOy* и получен ответ, но он недостаточно обоснован или содержит незначительные ошибки.	Получим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} a = -x^2 + x; \\ a = -x^2 - x - 1. \end{array}\right.$ Построим графики функций в системе xOa. 1) $a = -x^2 + x$ — парабола ветвями вниз. Вершина параболы: $x_{\text{в}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$; $a_{\text{в}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Нули: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ 2) $c = -x^2 - x - 1$ — парабола ветвями вниз. Вершина параболы: $x_{\text{в}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; $a_{\text{в}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4}$. Нулей нет.
4 балла. Обоснованно получен правильный ответ.	Построим графики этих функций:  *Ответ*: 1) решений нет при $a > \frac{1}{4}$; 2) одно решение при $a = \frac{1}{4}$; 3) два решения при $-\frac{3}{4} \leqslant a < \frac{1}{4}$; 4) четыре решения при $a < -\frac{3}{4}$.

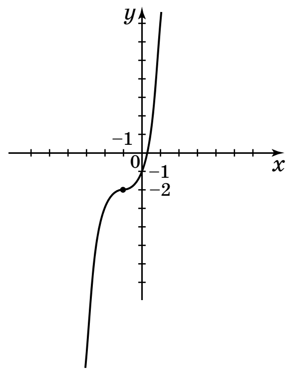
2. *Ответ*: −3.

3. *Ответ*: −3.

День 48

3.3.4. Степенная функция с натуральным показателем

1*. На рисунке изображен график функции $y=(x+a)^5+b$. Определите a и b. В ответ запишите $a\cdot b$.



1

2*. Пользуясь графиком функции $y=x^{12}$, выясните, сколько решений имеет уравнение $x^{12}=3$.

2

3*. Функция задана формулой $f(x)=2x^3$. Вычислите значение разности $f(2)-3f(1)$.

3

4*. Функция задана формулой $f(x)=(x+1)^3-8$. Не выполняя построения графика, найдите абсциссу точки пересечения графика с осью Ox.

4

5*. Решите уравнение графически: $x^5=3x$. В ответ запишите целый корень.

5

Свойства функции $y=ax^{2n}$, $n\in N$

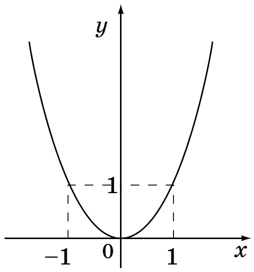
1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=[0;+\infty)$, если $a>0$, $E(y)=(-\infty;0]$, если $a<0$.
3. Функция четная: $a(-x)^{2n}=ax^{2n}$.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства: $ax^{2n}\geqslant 0$ для $x\in R$, если $a>0$; $ax^{2n}\leqslant 0$ для $x\in R$, если $a<0$.
6. Промежутки монотонности: если $a>0$, то функция убывает для $x\in(-\infty;0]$ и возрастает для $x\in[0;+\infty)$;
   если $a<0$, то функция возрастает для $x\in(-\infty;0]$ и убывает для $x\in[0;+\infty)$.
7. Экстремумы:
   если $a>0$, то $x=0$ — точка минимума;
   если $a<0$, то $x=0$ — точка максимума.

Свойства функции $y=ax^{2n+1}$, $n\in N$

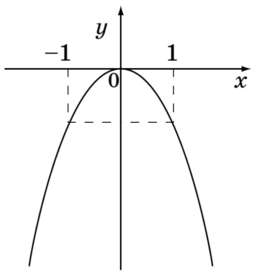
1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=R$.
3. Функция нечетная: $a(-x)^{2n+1}=-ax^{2n+1}$.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства: если $a>0$, то $y<0$ для $x\in(-\infty;0)$ и $y>0$ для $x\in(0;+\infty)$; если $a<0$, то $y<0$ для $x\in(0;+\infty)$ и $y>0$ для $x\in(-\infty;0)$.
6. Промежутки монотонности: если $a>0$, то функция возрастает для $x\in R$; если $a<0$, то функция убывает для $x\in R$.
7. Экстремумов нет.

Ответы:

График функции
$y = ax^{2n}, n \in N$

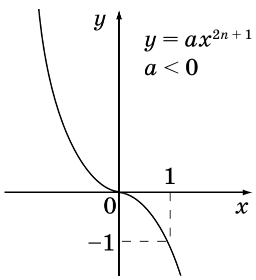


$y = ax^{2n}$, $a > 0$

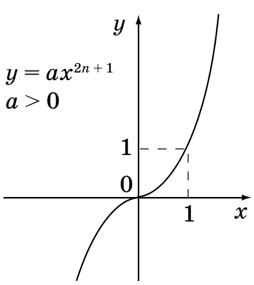


$y = ax^{2n}$, $a < 0$

График функции
$y = ax^{2n+1}, n \in N$

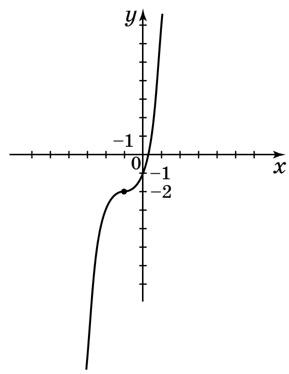


$a < 0$



$a > 0$

1. График данной функции получен путем переноса графика функции $y = x^5$ по оси Ox на 1 единицу влево и вниз по оси Oy на 2 единицы. Значит, это график функции $y = (x+1)^5 - 2$.

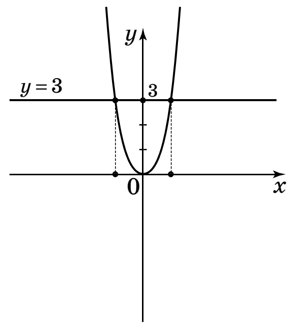


$$a = 1,\ \ b = -2,\ \ a \cdot b = -2.$$

Ответ: −2.

2. Графики функций $y = x^{12}$ и $y = 3$ имеют две точки пересечения, поэтому уравнение $x^{12} = 3$ имеет два решения.

Ответ: 2.



3. Найдем значение разности:

$$f(2) - 3f(1) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16 - 6 = 10.$$

Ответ: 10.

4. *Ответ*: 1.

5. *Ответ*: 0.

День 49

3.3.5. Тригонометрические функции, их графики

1*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a^2 + 2 - 2\cos 2x - 4a \sin x = 0$ имеет на интервале $[0; \pi]$ ровно два корня.

2*. Определите наименьшее значение функции $y = 2\sin 3x - 1$.

3*. Определите наименьший положительный период функции $y = 3\,\mathrm{tg}\,(2\pi x) + 1$.

График функции $y = \sin x$ (синусоида)

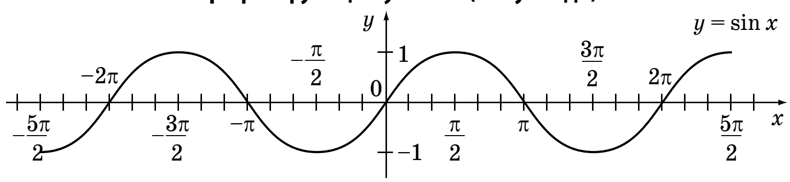


График функции $y = \cos x$ (косинусоида)

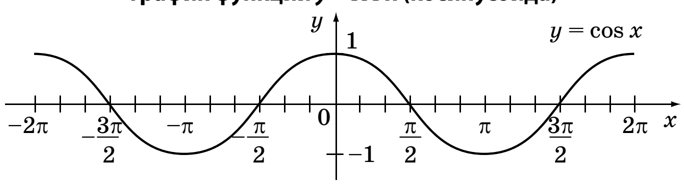


График функции $y = \mathrm{tg}\, x$ (тангенсоида)

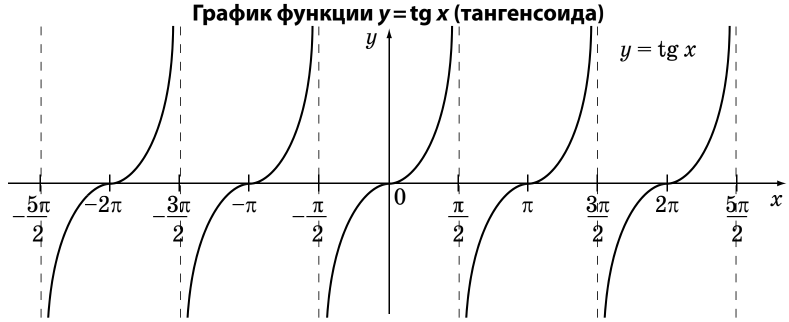
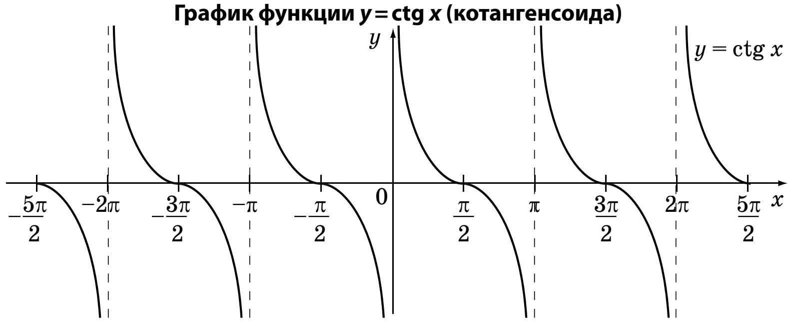
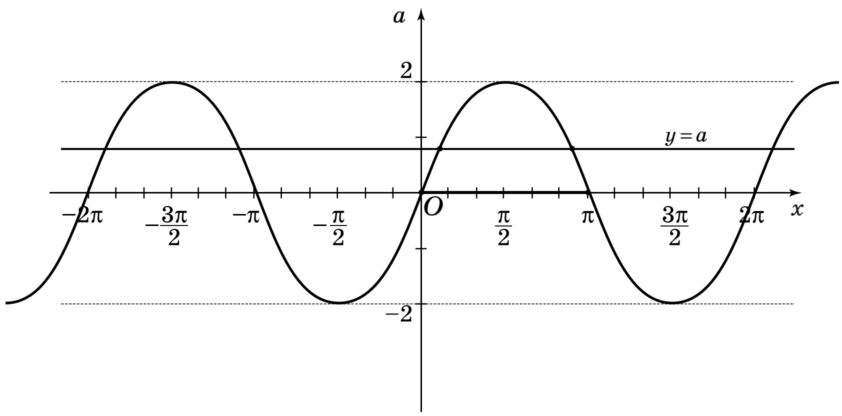


График функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ (котангенсоида)



Ответы:

1.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Сделан верный переход к уравнению, содержащему одну функцию.	Применим формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, уравнение примет вид $a^2 + 2 - 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) - 4a\sin x = 0;$
2 балла. Верно выполнены преобразования, выделен полный квадрат.	$a^2 + 2 - 2 + 4\sin^2 x - 4a\sin x = 0;$ $4\sin^2 x - 4a\sin x + a^2 = 0;$ $(2\sin x - a)^2 = 0;$
3 балла. Ответ получен аналитически или графически, но недостаточно обоснован или сделаны незначительные ошибки.	$2\sin x - a = 0.$ Построим график функции $a = 2\sin x$ в координатной плоскости xOa. 
4 балла. Обоснованно получен правильный ответ.	Очевидно, что на интервале $[0;\pi]$ уравнение будет иметь ровно два корня при $0 \leqslant a < 2$. *Ответ*: $a \in [0; 2)$.

2. *Ответ*: -3.

3. *Ответ*: $0{,}5$.

День 50

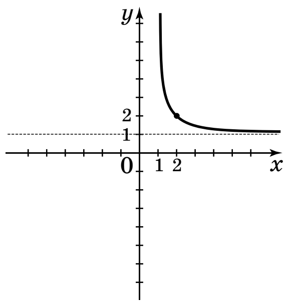
3.3.6. Показательная функция, ее график

1*. Изобразите схематично график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 3$. Определите по графику наибольшее значение функции.

2*. Найдите ординату точки пересечения графика $y = 7^x - 3$ с осью Oy.

3*. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16$ с осью Ox.

4*. На рисунке изображен график функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+a} + b$. Найдите a и b, в ответ запишите $a \cdot b$.

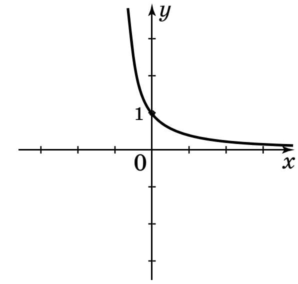


5*. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = 5^{x+1} - 125$ с осью Ox.

Ответы:

1. Последовательно строим графики.

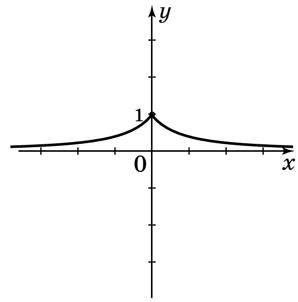
а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



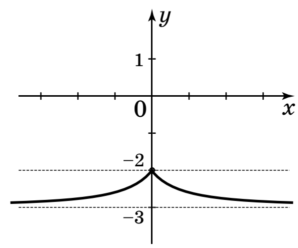
Эта показательная функция убывает, т. к. основание

$$a = \frac{1}{2} < 1.$$

б) При $x \geqslant 0$ график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ совпадает с графиком функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. При $x < 0$ график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ получается в результате симметричного отображения относительно Oy его правой части.



в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 3$.



Параллельно перенесем график $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ вдоль оси Oy на (-3) единицы. По графику видно, что наибольшее значение функции $y(0) = -2$.

Ответ: -2.

2. График пересекает ось Oy, если $x = 0$.

$$y = 7^0 - 3;\quad y = 1 - 3;\quad y = -2.$$

Ответ: -2.

3. График пересекает ось Ox при $y = 0$. Получаем уравнение

$$0 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16;\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16;\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4};\quad x = -4.$$

Ответ: -4.

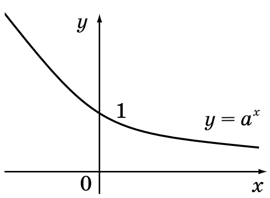
4. *Ответ*: $a = -2$; $b = 1$, $a \cdot b = -2$.

5. *Ответ*: 2.

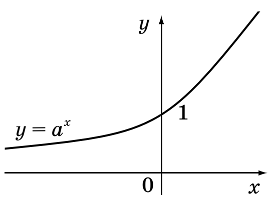
Свойства показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

1. $D(a^x) = R$.
2. $E(a^x) = (0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: $a^x > 0$ для $x \in R$.
6. Промежутки монотонности: если $a > 1$, то функция возрастает при $x \in R$; если $0 < a < 1$, то функция убывает при $x \in R$.
7. Экстремумов нет.

График функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)



$0 < a < 1$



$a > 1$

День 51

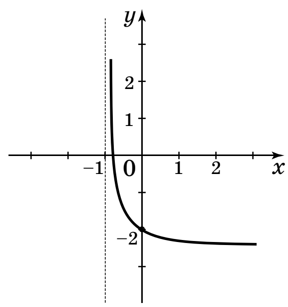
3.3.7. Логарифмическая функция и ее график

1*. Изобразите схематично график $y = \left|\log_2 (x-1)\right| + 2$. Укажите наименьшее значение функции.

2*. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} (2x-4)\right|$.

3*. Найдите абсциссы точек пересечения графика $y = \log_\pi \left(x^2 + 2x - 2\right)$ с осью Ox. В ответ запишите $x_1 + x_2$.

4*. На рисунке изображен график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} (x+a) + b$. Найдите a и b. В ответ запишите $a \cdot b$.



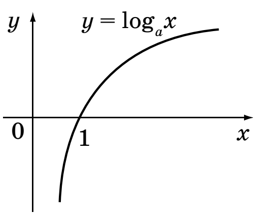
5*. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \log_3 \log_3 x$.

Ответы:

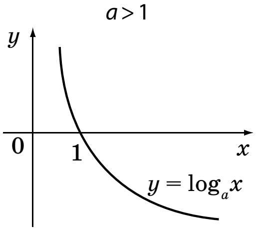
Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

1. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.
2. $E(\log_a x) = R$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. Ноль функции: $x = 1$.
5. Промежутки знакопостоянства: если $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$; если $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $(1; +\infty)$.
6. Промежутки монотонности: если $a > 1$, то функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то функция убывает при $x \in (0; +\infty)$.
7. Экстремумов нет.

График функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)



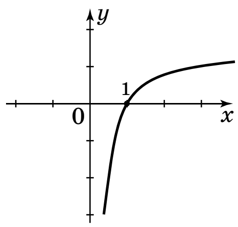
$a > 1$



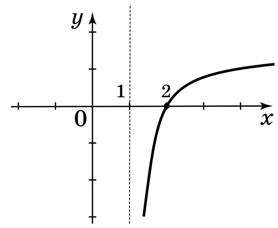
$0 < a < 1$

1. Построим последовательно графики:

а) $y = \log_2 x$. Это возрастающая логарифмическая функция, т. к. основание $a > 1$.

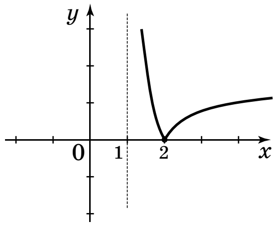


б) $y = \log_2(x-1)$. Получаем из графика $y = \log_2 x$ параллельным переносом вправо по оси Ox на единицу.



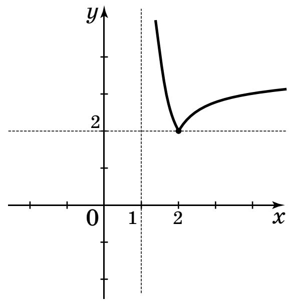
в) $y = \left|\log_2(x-1)\right|$

График получен из графика $y = \log_2(x-1)$: выше оси Ox — без изменения; ниже — симметрия относительно оси Ox.



г) $y = \left|\log_2(x-1)\right| + 2$.

Последний шаг — параллельный перенос вдоль оси Oy на 2 единицы вверх.



Очевидно, что наименьшее значение функции $y(2) = 2$.

Ответ: 2.

2. $f(3) = \left|\log_{\frac{1}{2}}(2 \cdot 3 - 4)\right| = \left|\log_{\frac{1}{2}} 2\right| = |-1| = 1.$

Ответ: 1.

3. Найдем область определения функции: $x^2 + 2x - 2 > 0$. График пересекает ось Ox при $y = 0$, получим уравнение:

$$0 = \log_\pi\left(x^2 + 2x - 2\right) \text{ или } \log_\pi\left(x^2 + 2x - 2\right) = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \pi^0; \\ x^2 + 2x - 2 > 0; \end{cases} \quad x^2 + 2x - 2 = 1; \quad x^2 + 2x - 3 = 0.$$

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -3$; $x_1 + x_2 = -2$. Значит, $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_1 + x_2 = 1 + (-3) = -2$.

Ответ: -2.

4. *Ответ*: $a = 1$; $b = -2$; $a \cdot b = -2$.

5. *Ответ*: 0.

День 52

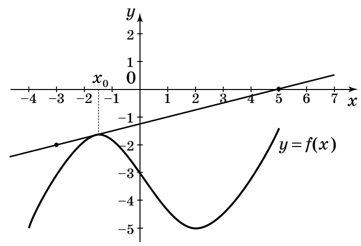
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРОИЗВОДНАЯ

4.1. Производная

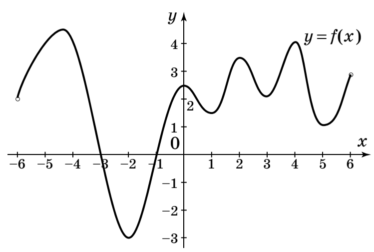
4.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

4.1.2. Уравнение касательной к графику функции

1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

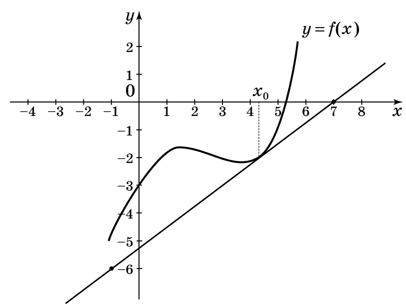


2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -18$.

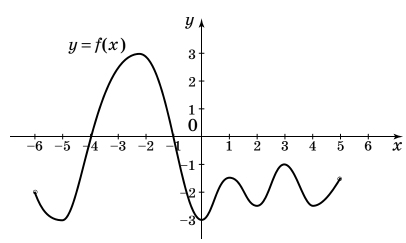


3. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



6. Прямая $y = 3x + 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответы:

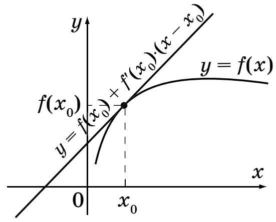
1. $f'(x_0)$ — значение производной функции $f(x)$ в точке x_0. Известно, что $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k$, где φ — угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 к положительному направлению оси Ox; k — угловой коэффициент этой касательной. Касательная проходит через точки: $(5;\,0)$ и $(-3;\,-2)$. Найдем k:

$$k = \frac{-2-0}{-3-5} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Значит, $f'(x_0) = 0,25$.

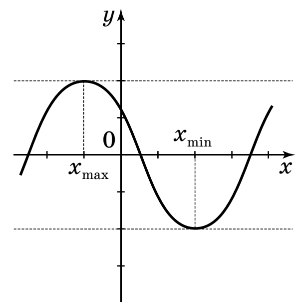
Ответ: 0,25.

Уравнение касательной к графику функции



$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

2. Прямая $y = -18$ параллельна оси Ox. Касательные к графику функции $y = f(x)$ параллельны оси Ox, если они проведены в точках экстремума функции (точках минимума или максимума) (см. рисунок). На рисунке задачи 8 точек экстремума.



Ответ: 8.

3. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);\quad f(x_0) = x_0^2 + 6x_0 - 8;$$

$$f'(x) = \left(x^2 + 6x - 8\right)' = 2x + 6\cdot 1 - 0 = 2x + 6;\quad f'(x_0) = 2x_0 + 6.$$

Итак, $y = x_0^2 + 6x_0 - 8 + (2x_0 + 6)(x - x_0) =$

$$= x_0^2 + \cancel{6x_0} - 8 + 2x_0x - 2x_0^2 + 6x - \cancel{6x_0} = x(2x_0 + 6) - x_0^2 - 8.$$

С другой стороны уравнение касательной: $y = kx + b$. Тогда

$$k = 2x_0 + 6,\quad b = -x_0^2 - 8.$$

По условию задачи касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$; значит, $k = 7$.

Получим уравнение $2x_0 + 6 = 7$, $2x_0 = 7 - 6$, $2x_0 = 1$,

$x_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 0,5$ — искомая абсцисса точки касания.

Ответ: 0,5.

4. *Ответ*: 0,75.

5. *Ответ*: 7.

6. *Ответ*: 4.

День 53

4.1.3. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком

1*. Точка движется по закону $S = \frac{1}{5}t^5 + 0,3t^2 - 5\sqrt{2}$. Найдите мгновенную скорость в момент времени $t = 2$ с. (S измеряется в метрах.)

2*. Вращение тела вокруг оси совершается по закону $\varphi(t) = 4t^2 - 3t + 2$.
В какой момент времени t его угловая скорость равняется 21 рад/с? (φ измеряется в радианах, t — в секундах.)

3*. Закон прямолинейного движения точки выражается формулой

$$s(t) = 5t^2 + 54t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{\log_2 7}{\sqrt{11}}.$$

В какой момент времени скорость точки наибольшая? (s измеряется в метрах, t — в секундах.)

4*. Точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 6\sqrt{3}.$$

Определите ее скорость через 4 с после начала движения. (s измеряется в метрах, t — в секундах.)

5*. Тело, масса которого 4 кг, движется прямолинейно по закону $s(t) = 2 - t + t^2$ (s измеряется в метрах, t — в секундах). Найдите кинетическую энергию (измеряется в Дж) тела $\frac{mv^2}{2}$ через 11 с после начала движения.

Ответы:

Таблица производных

$(C)'=0,\ C\in R;$

$(x^n)=nx^{n-1};$

$(\sin\ x)'=\cos\ x;$

$(\text{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(e^x)'=e^x;$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(x)'=1;$

$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$(\cos\ x)'=-\sin\ x;$

$(\text{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(a^x)'=a^x\ \ln\ a;$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}.$

1. $$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{5}t^5+0,3t^2-5\sqrt{2}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5\cdot t^4+0,3\cdot 2t-0=$$

$$=t^4+0,6t;\ v(2)=2^4+0,6\cdot 2=16+1,2=17,2\ \ (\text{м/с}).$$

Ответ: 17,2.

2. $$w(t)=\varphi'(t)=\left(4t^2-3t+2\right)'=4\cdot 2t-3\cdot 1+0=8t-3.$$

По условию $w(t)=21$ рад/с.
Получим уравнение: $8t-3=21$.
Отсюда $8t=21+3$; $8t=24$; $t=3$.
Искомый момент времени $t=3$ с.

Ответ: 3.

3. $$v(t)=s'(t)=\left(5t^2+54t-\frac{1}{3}t^3-\frac{\log_2 7}{\sqrt{11}}\right)'=$$

$$=5\cdot 2t+54\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 3t^2-0=-t^2+10t+54=$$

$$=-\left(t^2-10t+25\right)+25+54=-(t-5)^2+79.$$

В результате выделения полного квадрата двучлена в формуле $v(t)$ получили выражение, которое принимает наибольшее значение 79 при $t=5$. $t=5$ с — искомая величина.

Ответ: 5.

4. *Ответ*: 32.

5. *Ответ*: 882.

День 54

4.1.4. Производные суммы, разности, произведения, частного
4.1.5. Производные основных элементарных функций

1*. Найдите значение производной функции при заданном значении аргумента.

$$y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + 2,\quad x_0 = -2.$$

2*. Найдите значение производной функции при заданном значении аргумента.

$$y = 4\cos x - 3\sin x;\quad x_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

3*. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

4*. Найдите значение производной функции $f(x) = (3x-2)\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

5*. Найдите $f'(3) + g'(2)$, если $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$.

1
2
3
4
5

Ответы:

Правила дифференцирования

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(Cu)' = C \cdot u'$, где $C \in R$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v \neq 0)$

Производная сложной функции

$(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$;

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

$(e^u)' = e^u \cdot u'$;

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

1. $y'(x) = \left(\dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - x + 2\right)' =$

$= \dfrac{3}{4} \cdot \left(x^4\right)' - \dfrac{2}{3} \cdot \left(x^3\right)' + \dfrac{1}{4}\left(x^2\right)' - x' + 2' =$

$= \dfrac{3}{4} \cdot 4x^3 - \dfrac{2}{3} \cdot 3x^2 + \dfrac{1}{4} \cdot 2x - 1 + 0 = 3x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{2}x.$

Тогда $y'\left(x_0\right) = y'(-2) = 3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + \dfrac{1}{2}(-2) =$

$= 3 \cdot (-8) - 2 \cdot 4 + (-1) = -24 - 8 - 1 = -33.$

Ответ: -33.

2. $y'(x) = (4\cos x - 3\sin x)' = 4\cos' x - 3\sin' x =$
$= 4 \cdot (-\sin x) - 3 \cdot \cos x = -4\sin x - 3\cos x.$

Тогда $y'\left(x_0\right) = y'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -4\sin\dfrac{3\pi}{2} - 3\cos\dfrac{3\pi}{2} =$

$= -4 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 = 4 - 0 = 4.$

Ответ: 4.

3. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

$$f\left(x_0\right) = f(2) = \frac{2+3}{2-1} = \frac{5}{1} = 5;$$

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)' = \frac{(x+3)'(x-1) - (x-1)' \cdot (x+3)}{(x-1)^2} =$$

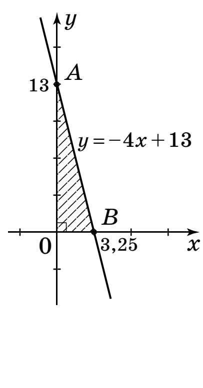
$$= \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2};$$

$$f'\left(x_0\right) = f'(2) = \frac{-4}{(2-1)^2} = -\frac{4}{1} = -4.$$

Подставим найденные значения в искомое уравнение касательной $y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$, получим:

$y = 5 - 4(x-2) = 5 - 4x + 8 = -4x + 13$; $y = -4x + 13$.

Изобразим на координатной плоскости треугольник, площадь S которого нужно найти. $y = -4x + 13$ — прямая:



x	0	3,25
y	13	0

$S = S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot AO \cdot OB = \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot 3,25 = 21,125.$

Ответ: 21,125.

4. *Ответ*: 8,5.

5. *Ответ*: $-0,25 + 2 = 1,75$.

День 55

4.1.6. Вторая производная и ее физический смысл

1*. Найдите вторую производную функции $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7$ в точке $x_0 = -1$.

1

2*. Точка движется по закону $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{14}t^2 + 7t - 11$. Найдите ускорение точки $a(t)$ через 2 с после начала движения. (Расстояние s измеряется в метрах.)

2

3*. Закон прямолинейного движения точки выражается формулой $s(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3} - \frac{15t^2}{2} + 9$. В какой момент времени ускорение движения равно нулю? (Время t измеряется в секундах.)

3

4*. Точка движется по закону $s(t) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^2$. Найдите ускорение движения точки через 1 с после начала движения. (Расстояние s измеряется в метрах.)

4

5*. Найдите вторую производную функции $f(x) = \cos 2x$ и вычислите ее значение при $x = \pi$.

5

Ответы:

1. $f'(x) = \left(x^4 - 5x^2 + 7\right)' = 4x^3 - 5 \cdot 2 \cdot x + 0 = 4x^3 - 10x;$

$f''(x) = \left(4x^3 - 10x\right)' = 4 \cdot \left(x^3\right)' - 10 \cdot x' = 4 \cdot 3x^2 - 10 \cdot 1 =$
$= 12x^2 - 10;$

$f''\left(x_0\right) = f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 10 = 12 \cdot 1 - 10 = 12 - 10 = 2.$

Ответ: 2.

2. $v(t) = s'(t) = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{14}t^2 + 7t - 11\right)' =$

$= \frac{1}{4}\left(t^4\right)' - \frac{1}{6}\left(t^3\right)' + \frac{1}{14}\left(t^2\right)' + 7t' - (11)' =$

$= \frac{1}{4} \cdot 4t^3 - \frac{1}{6} \cdot 3t^2 + \frac{1}{14} \cdot 2t + 7 \cdot 1 - 0 =$

$= t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{7}t + 7;$

$a(t) = v'(t) = \left(t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{7}t + 7\right)' = \left(t^3\right)' - \frac{1}{2}\left(t^2\right)' + \frac{1}{7}(t)' + (7)' =$

$= 3t^2 - \frac{1}{2} \cdot 2t + \frac{1}{7} \cdot 1 + 0 = 3t^2 - t + \frac{1}{7};$

$a(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 + \frac{1}{7} = 3 \cdot 4 - 2 + \frac{1}{7} = 10\frac{1}{7}\ \left(\text{м/с}^2\right).$

Ответ: $10\frac{1}{7}$.

3. $v(t) = s'(t) = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3} - \frac{15t^2}{2} + 9\right)' =$

$= \frac{4}{12}t^3 + \frac{1}{3} \cdot 3t^2 - \frac{15 \cdot 2t}{2} + 0 = \frac{1}{3} \cdot t^3 + t^2 - 15t;$

$a(t) = v'(t) = \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 + t^2 - 15t\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 + 2t - 15 = t^2 + 2t - 15.$

По условию задачи $a(t) = 0$. Получим уравнение

$$t^2 + 2t - 15 = 0,\quad t_1 = -5,\quad t_2 = 3.$$

$t_1 = -5$ не удовлетворяет условию задачи. Значит, ускорение движения равно нулю в момент времени $t = 3$ с.
Ответ: 3.

4. *Ответ*: 13 м/с^2.

5. *Ответ*: 0.

День 56

4.2. Исследование функций

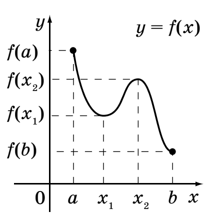
4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

2*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2 - \frac{5}{2}x^2 - x^5 - a = 0$ имеет три решения. В ответ запишите наименьшее целое из них.

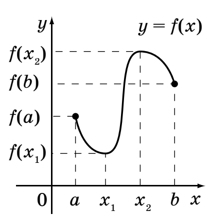
3*. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x - \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-17)e^{x-16}$ на отрезке $[15;17]$.



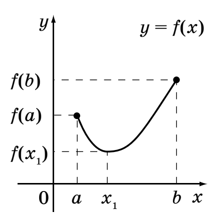
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$,

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$



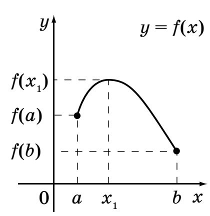
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$,

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$



$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$,

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$



$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$,

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

Ответы:

1. $D(y)=R.\ \ y'(x)=\left((x-8)\,e^{x-7}\right)'=(x-8)'\,e^{x-7}+$

$+\left(e^{x-7}\right)'(x-8)=1\cdot e^{x-7}+e^{x-7}\cdot(x-7)'(x-8)=$

$=e^{x-7}+e^{x-7}(x-8)=e^{x-7}(1+x-8)=e^{x-7}(x-7).$

Найдем критические точки функции (стационарные точки): $y'(x)=0;\ \ e^{x-7}(x-7)=0;\ \ e^{x-7}\neq 0$ при всех x, поэтому $x-7=0,\ \ x=7.$ Отрезку $[6;\,8]$ принадлежит точка $x=7.$ Найдем значение функции в концах промежутка и в критической точке.

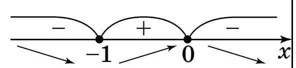
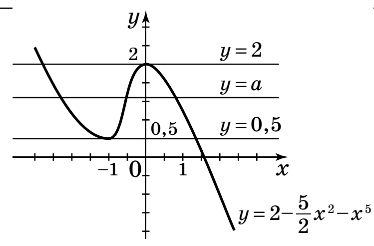
$y(6)=(6-8)\,e^{6-7}=-2e^{-1}=-\dfrac{2}{e}>-1;\quad y(8)=(8-8)\,e^{8-7}=$

$=0\cdot e^{1}=0;\ \ y(7)=(7-8)\,e^{7-7}=-1\cdot e^{0}=-1\cdot 1=-1.$

Выберем из полученных значений наименьшее. Очевидно, наименьшее значение данной функции на отрезке $[6;\,8]$ равняется -1.

Ответ: -1.

2.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Верно выбран ход решения задачи. Правильно найдены интервалы возрастания и убывания функции.	$D(y)=R.\ \ y'=\left(2-\dfrac{5}{2}x^2-x^5\right)'=-\dfrac{5}{2}\cdot 2x-5x^4=-5x-5x^4=$ $=-5x\left(x^3+1\right).\ \ y'(x)=0,\ \ -5x\left(x^3+1\right)=0,$ $x=0$ и $x^3+1=0,\ \ x=0$ и $x=-1.$  Определим знак производной в каждом интервале, на которые разбивается числовая прямая точками $x=0$ и $x=-1$.
2 балла. Правильно вычислены точки экстремума и экстремумы функции.	Учитывая знаки производной, получаем: функция $y(x)$ убывает на каждом из интервалов $(-\infty;\,-1),\ \ (0;\,+\infty)$; возрастает на интервале $(-1;\,0)$; точки экстремума: $x_{\min}=-1;\ \ x_{\max}=0$; экстремумы функции: $y_{\min}=y(-1)=2-\dfrac{5}{2}(-1)^2-(-1)^5=2-2,5+1=0,5;$ $y_{\max}=y(0)=2-\dfrac{5}{2}\cdot 0^2-0^5=2.$
3 балла. Верно построен график функции и правильно указаны все значения параметра *a*.	На графике функции видно, что прямая $y=a$ пересекает график в трех точках при $a\in(0,5;\,2)$. 
4 балла. Обоснованно получен правильный ответ.	Значит, $a=1$ — наименьшее целое значение из них. *Ответ*: 1.

3. *Ответ*: 3.

4. *Ответ*: -1.

День 57

4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах

1*. Запишите число 25 в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

1

2*. Забором, длина которого равна 100 м, нужно огородить наибольший по площади прямоугольный участок земли, если он граничит с речкой. Какими должны быть размеры участка, если со стороны реки забора нет?

2

3*. Из всех прямоугольников, периметр которых 28 см, найдите тот, у которого наименьшая диагональ.

3

Ответы:

Таблица производных

$(C)'=0,\ C \in R;$

$(x^n)=nx^{n-1};$

$(\sin x)'=\cos x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(e^x)'=e^x;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(x)'=1;$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$(\cos x)'=-\sin x;$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(a^x)'=a^x \ln a;$

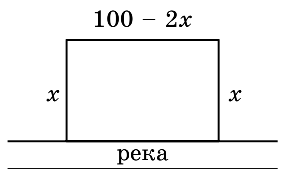
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$

1. Пусть x — первый множитель, тогда $\dfrac{25}{x}$ — второй. По условию задачи $x > 0$. Таким образом, данная задача сводится к нахождению такого значения x, при котором функция $y = x + \dfrac{25}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x > 0$.

$$y'(x) = \left(x + \frac{25}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

Критические точки функции $y'(x) = 0$ при $x_1 = 5$; $x_2 = -5$.
Точка $x = -5$ не принадлежит интервалу $x > 0$.
При переходе через точку $x = 5$ производная функции $y(x)$ меняет знак с «−» на «+», следовательно, $x = 5$ — точка минимума. Поэтому наименьшее значение на интервале $x > 0$ функция $y = x + \dfrac{25}{x}$ принимает в точке $x = 5$.
$(y(5) = 10.)$ Итак, искомые числа: 5 и $\dfrac{25}{5} = 5$.
Ответ: $25 = 5 \cdot 5$.

2. Пусть x м — длина двух равных сторон участка, которые заканчиваются у реки. Тогда $(100 - 2x)$ м — длина стороны участка, параллельной реке.



Площадь участка $S(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.

По условию задачи $0 < x < 100$.
Найдем наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[0; 100]$.

$$S'(x) = \left(100x - 2x^2\right)' = 100 - 4x; \quad S'(x) = 0;$$
$$100 - 4x = 0; \quad x = 25; \quad 25 \in [0; 100].$$

Вычислим значения функции $S(x)$ в концах промежутка $[0; 100]$ и в критической точке $x = 25$.

$$S(0) = 100 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0;$$
$$S(1) = 100 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 100 - 2 = 98;$$
$$S(25) = 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 2500 - 2 \cdot 625 = 2500 - 1250 = 1250.$$

Наибольшего значения функция достигает в точке $x = 25$, поэтому одна сторона участка — 25 м, а другая — $100 - 2 \cdot 25 = 50$ м.
Ответ: 25 и 50.

3. *Ответ*: это квадрат со стороной 7 см.

День 58

4.3. Первообразная и интеграл

4.3.1. Первообразные элементарных функций

1*. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(x_0; y_0)$.

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - \quad M(-1; 1).$$

В ответ запишите произведение всех коэффициентов полученного уравнения первообразной.

	1

2*. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(x_0; y_0)$.

$$f(x) = \frac{3}{x} + e^{2x}, \quad M(1; 0,5e^2).$$

В ответ запишите цифру правильного уравнения.

1) $F(x) = 3\ln x + 0,5e^{2x} + 0,5e$;

2) $F(x) = 3\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x}$;

3) $F(x) = -\frac{3}{x^2} + 2e^{2x}$.

	2

3*. Вычислите: $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}$.

	3

4*. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(x_0; y_0)$.

$$f(x) = 6\sqrt{x} + \cos 2\pi x, \quad M(1; 5).$$

В ответ запишите наибольший коэффициент в полученном уравнении первообразной.

	4

5*. Для функции $f(x) = 3x^2 - 6x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $B(-1; 6)$.

	5

6*. Вычислите $\int\limits_{1}^{e+2} \frac{7dx}{x-2}$.

	6

Ответы:

1. Общий вид первообразных для данной функции:

$$F(x) = 5 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + 4 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} - 3 \cdot x + C =$$

$$= \frac{5x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x + C = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x + C.$$

Найдем C. Подставим в полученную формулу координаты точки $M(-1; 1)$:

$$1 = (-1)^5 + (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + C,$$

$$1 = -1 + 1 + 1 + 1 + 3 + C, \quad C = -4.$$

Значит, искомое уравнение первообразной имеет вид

$$F(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Найдем произведение коэффициентов в последней формуле:

$$1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-4) = -12.$$

Ответ: -12.

2. Общий вид первообразных для функции:

$$F(x) = 3\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Найдем C: $0,5e^2 = 3\ln|1| + \frac{1}{2}e^{2\cdot1} + C$;

$0,5e^2 = 3\ln 1 + 0,5e^2 + C$; $C = 0$ $(\ln 1 = 0)$.

Значит, искомое уравнение первообразной:

$$F(x) = 3\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Ответ: 2.

3. $$\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(3 \cdot \frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 0\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. *Ответ*: 4.

5. *Ответ*: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 10$.

6. *Ответ*: 7.

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)+C$
0	C
1	$x+C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Правила вычисления первообразной (неопределенных интегралов)

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

где $k \neq 0$, $b \neq R$

День 59

4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

1*. Материальная точка движется прямолинейно так, что ее скорость в момент времени t равняется $v(t) = 0,6t + 3$ (м/с). Найдите путь, пройденный точкой с момента времени $t_1 = 3$ с до момента времени $t_2 = 10$ с.

1

2*. Найдите объем тела V, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 9 - x^2$, $y = 0$. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

2

3*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\sin x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

3

4*. Материальная точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t вычисляется по формуле $v(t) = 4t^3 + 1$ (м/с). Найдите путь, пройденный точкой с момента времени $t_1 = 2c$ до момента времени $t_2 = 5$ с.

4

5*. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$.

5

6*. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = -x^2 + 4x + 2$.

6

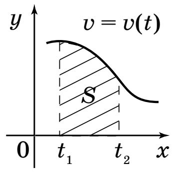
Ответы:

1. $v(t) = s'(t)$, поэтому, учитывая условие задачи,

$$s(t) = \int\limits_3^{10} (0,6t + 3)\,dt = \left(0,6 \cdot \frac{t^2}{2} + 3t\right)\Bigg|_3^{10} = \left(0,3t^2 + 3t\right)\Big|_3^{10} =$$
$$= 0,3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - \left(0,3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right) = 0,3 \cdot 100 + 30 - 2,7 - 9 =$$
$$= 60 - 11,7 = 48,3 \text{ (м)}.$$

Ответ: 48,3.

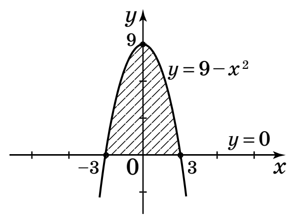
Физический смысл определенного интеграла



Путь S, пройденный телом при прямолинейном движении со скоростью $v(t)$ за интервал времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

2. Изобразим заданную фигуру на координатной плоскости. Найдем абсциссы точек пересечения линий: $y = 9 - x^2$ и $y = 0$.



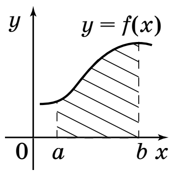
$9 - x^2 = 0, \quad (3 - x)(3 + x) = 0, \quad x_1 = 3,$
$x_2 = -3.$

Подставим данные задачи в формулу $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx, \quad a < b,$ получим:

$$V = \pi\int\limits_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)^2 dx = \pi\int\limits_{-3}^{3} \left(81 - 18x^2 + x^4\right) dx =$$
$$= \pi\left(81x - 18 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = \pi\left(81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-3}^{3} =$$
$$= \pi\left(81 \cdot 3 - 6 \cdot 3^3 + \frac{3^5}{5} - \left(81(-3) - 6 \cdot (-3)^3 + \frac{(-3)^5}{5}\right)\right) =$$
$$= \pi\left(243 - 162 + \frac{243}{5} + 243 - 162 + \frac{243}{5}\right) = 259,2 \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: 259,2.

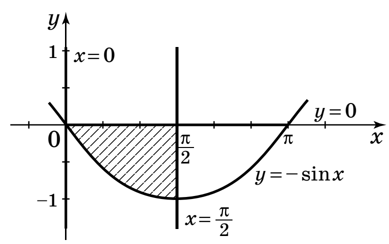
Геометрический смысл определенного интеграла



Площадь S криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной на интервале $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$) вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

3. Изобразим искомую фигуру на координатной плоскости. На заданном промежутке $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ функция $y = -\sin x$ принимает значения от -1 до 0. Поэтому искомая площадь:



$$S = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= -\cos\frac{\pi}{2} - \left(-\cos 0\right) = 0 - (-1) = 1 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: 1.

4. *Ответ*: 612.

5. *Ответ*: 4,5.

6. *Ответ*: 9.

День 60

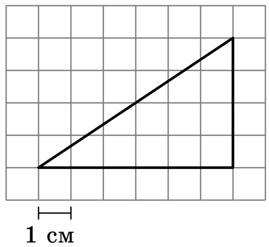
ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Планиметрия

5.1.1. Треугольник

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 8, а $\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

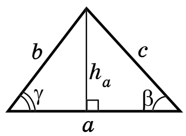


3*. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM, которая делит сторону BC на отрезки BM и MC.
Найдите угол C, если $BC = 8$, $BM : MC = 7:5$, $AB + AC = 12$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 15, а $\cos\angle A = \dfrac{4\sqrt{14}}{15}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

5*. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $AC = 5\sqrt{3}$. Найдите $\sin\angle A$.

Ответы:



Высоту треугольника можно найти по формулам:

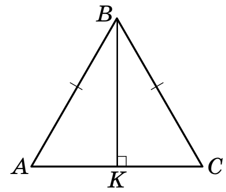
$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta$,

$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \times$

$\times\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{a+b+c}{2}$

1. Пусть BK — высота равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, проведенная к основанию.



По условию: $AB = 8$, $\cos\angle A = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Из $\triangle AKB$, где $\angle AKB = 90^\circ$, т. к. $BK \perp AC$: $BK = AB\cdot\sin\angle A$, $0^\circ < \angle A < 90^\circ$.

$$\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{16-7}{16}} =$$

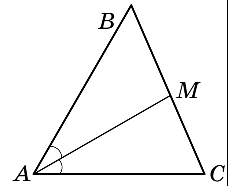
$$= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$ Итак, $BK = 8\cdot\frac{3}{4} = 6$.

Ответ: 6.

2. Пусть катеты данного на рисунке треугольника равны a и b. Тогда $a = 6$ см, $b = 4$ см. Искомая площадь прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника, построенного на его катетах, равных 3 и 4 см. Площадь прямоугольника: $S = 3\cdot 4 = 12$ см^2.

Ответ: 12.

3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Правильно использовано свойство биссектрисы треугольника. Верно составлена система уравнений для нахождения неизвестных сторон треугольника.	По свойству биссектрисы треугольника: $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$. Так как по условию $\frac{BM}{MC} = \frac{7}{5}$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{7}{5}$. Пусть $AB = x$, $AC = y$, тогда $\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$, $5x = 7y$, $x = 1{,}4y$.  По условию $AB + AC = 12$, отсюда $x + y = 12$. Составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 12; \\ x = 1{,}4y. \end{cases}$
2 балла. Верно решена система уравнений. Правильно записана формула для нахождения косинуса искомого угла.	$\begin{cases} 1{,}4y + y = 12; \\ x = 1{,}4y; \end{cases}$ $\begin{cases} 2{,}4y = 12; \\ x = 1{,}4y; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 12 : 2{,}4; \\ x = 1{,}4y; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5; \\ x = 7. \end{cases}$ Значит, $AB = 7$, $AC = 5$. Из треугольника ABC по теореме косинусов: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC\cdot AC\cdot\cos\angle C$, отсюда $\cos\angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2\cdot BC\cdot AC}$;
3 балла. Правильно вычислен косинус искомого угла и записан угол.	$\cos\angle C = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2\cdot 8\cdot 5} = \frac{64+25-49}{80} = \frac{89-49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle C = 60^\circ$. *Ответ*: 60°.

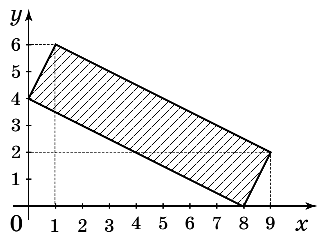
4. *Ответ*: 1.

5. *Ответ*: 0,5.

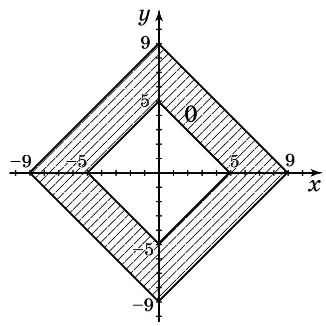
День 61

5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

1. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(8;0)$, $(9;2)$, $(1;6)$, $(0;4)$.

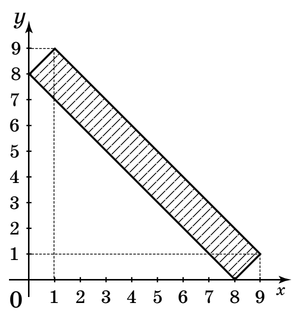


2. Найдите площадь заштрихованной фигуры на координатной плоскости.

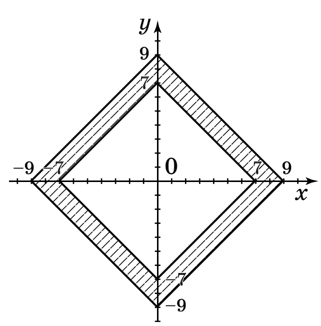


3*. Найдите большую диагональ параллелограмма $ABCD$, стороны которого относятся как $2:3$, а перпендикуляр AM, проведенный к меньшей диагонали, делит ее на отрезки 4 и 9.

4. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(8;0)$, $(9;1)$, $(1;9)$, $(0;8)$.



5. Найдите площадь заштрихованной фигуры на координатной плоскости.



Ответы:

1. Пусть $A(8;0)$, $B(9;2)$, $C(1;6)$, $D(0;4)$. $ABCD$ — прямоугольник, тогда $S_{ABCD} = AB \cdot AD$. Используем теорему Пифагора для нахождения AB и AD: $AB = \sqrt{(9-8)^2+2^2} =$ $= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$; $AD = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$;

$S_{ABCD} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{80} = \sqrt{5 \cdot 80} = \sqrt{400} = 20.$

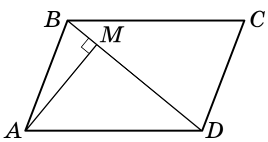
Ответ: 20.

2. Внешняя граница заштрихованной фигуры — квадрат со стороной 9, а внутренняя — квадрат со стороной 5. Искомая площадь равна разности площадей этих квадратов:

$$S = 9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56.$$

Ответ: 56.

3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Проведены правильные рассуждения; верно найдены стороны параллелограмма.	 Известно, что против большего угла треугольника лежит большая сторона, а против меньшего — меньшая. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ — острый, тогда BD — меньшая диагональ, следовательно, AC — большая диагональ. Пусть $AB : AD = 2 : 3$, тогда $BM = 4$, $MD = 9$. Найдем AB и AD. Выразим AM^2 из прямоугольных треугольников ABM и ADM, используя теорему Пифагора. Из $\triangle AMB$: $AM^2 = AB^2 - BM^2$; Из $\triangle ADM$: $AM^2 = AD^2 - MD^2$. Отсюда $AB^2 - BM^2 = AD^2 - MD^2$. Пусть x — величина одной части, тогда $AB = 2x$, $AD = 3x$. Составим и решим уравнение: $(2x)^2 - 4^2 = (3x)^2 - 9^2$; $4x^2 - 16 = 9x^2 - 81$ $9x^2 - 4x^2 =$ $= 81 - 16$; $5x^2 = 65$; $x^2 = 13$; $x = \pm\sqrt{13}$, $x = -\sqrt{13}$ не удовлетворяет условию задачи. Тогда $AB = 2\sqrt{13}$, $AD = 3\sqrt{13}$. $BD = BM + MD = 4 + 9 = 13$.
2 балла. Верно использована теорема косинусов, правильно найден острый угол параллелограмма.	Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle A$, отсюда $\cos\angle A = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \dfrac{(2\sqrt{13})^2 + (3\sqrt{13})^2 - 13^2}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}} =$ $= \dfrac{4 \cdot 13 + 9 \cdot 13 - 169}{12 \cdot 13} = \dfrac{13(4+9) - 169}{12 \cdot 13} = \dfrac{0}{12 \cdot 13} = 0.$ Следовательно $\angle A = 90°$.
3 балла. Обоснованно получен правильный ответ. Верно использованы признак прямоугольника и его свойство.	Значит, $ABCD$ — прямоугольник, тогда $BD = AC$ (по свойству прямоугольника). $AC = 13$. *Ответ*: 13.

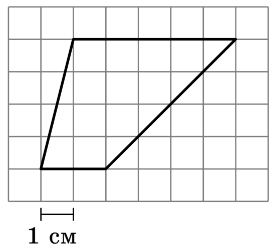
4. *Ответ*: 16.

5. *Ответ*: 32.

День 62

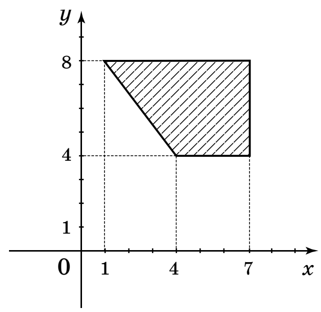
5.1.3. Трапеция

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



1

2. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

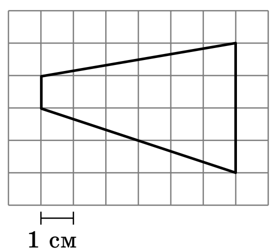


1

3*. В равнобокой трапеции разность оснований равна 20 см, а периметр — 65 см. Вычислите площадь трапеции, если боковая ее сторона и высота относятся как 5 : 3.

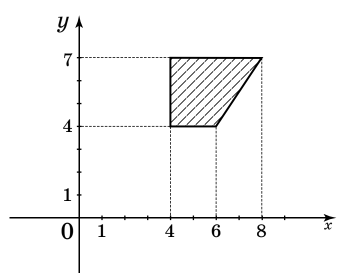
1

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



1

5. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



1

Ответы:

1. Из рисунка видно, что основания трапеции равны 2 см и 5 см, высота — 4 см. Тогда ее площадь равна

$$S = \frac{2+5}{\cancel{2}}\cdot \cancel{4}^{2} = 7\cdot 2 = 14\ \text{см}^2.$$

Ответ: 14.

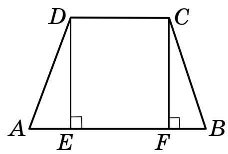
2. Основания данной трапеции равны: $7 - 1 = 6;\quad 7 - 4 = 3;$,

а высота: $8 - 4 = 4$. Следовательно, площадь трапеции равна

$$S = \frac{6+3}{2}\cdot 4 = 9\cdot 2 = 18.$$

Ответ: 18.

3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Проведены верные рассуждения, ведущие к правильному решению.	 Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AB и DC — ее основания, AD и BC — боковые стороны, по условию задачи они равны. Опустим перпендикуляры DE и CF на нижнее основание. Тогда $AB - CD = AE + FB$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC)\cdot DE.$ $\triangle AED = \triangle BFC$ (из равенства соответствующих катетов $DE = CF$ и гипотенуз $AD = BC$). Следовательно, $AE = BF$, поэтому $AB - DC = 2AE$. По условию задачи разность оснований равна 20 см, т. е. $2AE = 20$ см, $AE = 10$ см.
2 балла. Правильно найдены высота и сумма оснований трапеции.	Пусть x см — величина одной части, где $x > 0$. Тогда $AD = BC = 5x$ см, $DE = CF = 3x$ см. Из $\triangle AED$, где $\angle AED = 90^\circ$, используя теорему Пифагора, получим: $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} =$ $= \sqrt{25x^2 - 9x^2} = \sqrt{16x^2} = 4x,\ \ 4x = 10,\ \ x = 2,5$ см. Значит, $AD = BC = 5\cdot 2,5 = 12,5$ см; $DE = CF = 3\cdot 2,5 = 7,5$ см. $P_{ABCD} = AB + DC + 2AD$, отсюда $AB + DC = P_{ABCD} - 2AD$. По условию $P_{ABCD} = 65$ см, поэтому $AB + DC = 65 - 2\cdot 12,5 = 65 - 25 = 40$ см.
3 балла. Обоснованно получен правильный ответ.	Итак, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 7,5 = 20\cdot 7,5 = 150$ см^2. *Ответ*: 150.

4. *Ответ*: 15.

5. *Ответ*: 9.

День 63

5.1.4. Окружность и круг
5.1.5. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

1*. Точки A, B, C, D лежат на окружности, AB — диаметр окружности, величина угла DCB равняется 43°. Найдите величину угла ABD.

1

2*. Через точку A, находящуюся вне окружности, проведена прямая, которая пересекает данную окружность в точках K и B, причем $AK = 8$ см, $AB = 32$ см. Найдите расстояние от точки A до центра данной окружности, если ее радиус равен 12 см.

2

3*. Боковая сторона равнобедренного треугольника — 6 см, высота, проведенная к основанию, равна 4 см. Найдите разность между площадью круга, ограниченного окружностью, описанной около данного треугольника и длиной этой окружности. В ответ запишите результат, поделенный на π.

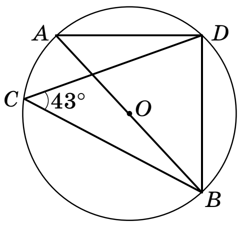
3

4*. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) в него окружностей.
($R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — площадь треугольника.)

4

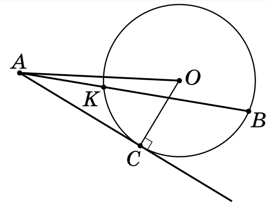
Ответы:

1. $\angle DAB = \angle DCB$ как опирающиеся на хорду BD. Значит, $\angle DAB = 43°$. $\angle ADB = 90°$ как опирающийся на диаметр AB. В $\triangle ADB$ $\angle ADB = 90°$, $\angle DAB = 43°$, $\angle A + \angle D + \angle B = 180°$, следовательно: $\angle ABD = 180° - (\angle ADB + \angle DAB) = 180° - (90° + 43°) = 47°$.

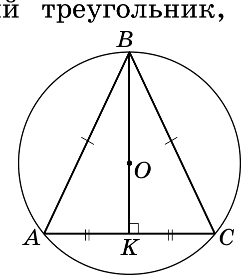


Ответ: 47.

2.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Использованы верные утверждения, ведущие к правильному решению задачи (выполнено необходимое дополнительное построение).	Дополнительное построение: проведем через точку A касательную AC к данной окружности, OC — радиус окружности. $OC \perp AC$ как радиус окружности, проведенный в точку касания. 
2 балла. Проведены правильные вычисления.	По свойству секущей и касательной, проведенных из одной точки к окружности: $AK \cdot AB = AC^2$, значит, $AC^2 = 8 \cdot 32 = 256$. Из $\triangle ACO$, где $\angle ACO = 90°$, по теореме Пифагора: $AO^2 = OC^2 + AC^2$.
3 балла. Проведены правильные вычисления, получен верный ответ.	$AO = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 256} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ см. AO — искомое расстояние. *Ответ*: 20.

3.

Критерии проверки решения:	*Решение*:
1 балл. Использованы верные утверждения, ведущие к правильному решению задачи (выполнено необходимое дополнительное построение).	Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник, $AB = BC = 6$ см, $BK = 4$ см — высота. Центр окружности, описанной около треугольника, находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Значит, $OB = R$ ($O \in BK$, т. к. высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является и его медианой, биссектрисой).  $R = \dfrac{abc}{4S}$, где $a = AB, b = BC, c = AC$, $S = S_{\triangle ABC}$. Из $\triangle AKB$, где $\angle AKB = 90°$: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20}$ см.
2 балла. Проведены правильные вычисления.	$AK = \dfrac{1}{2} AC$; $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BK = AK \cdot BK = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$ см^2. Значит, $R = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{20}}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}\cancel{\sqrt{5}}}{4 \cdot \underset{2}{\cancel{8}}\cancel{\sqrt{5}}} = \dfrac{9}{2} = 4,5$ (см).
3 балла. Проведены правильные вычисления, получен верный ответ.	Длина окружности: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 4,5 = 9\pi$ см. Площадь круга: $S = \pi R^2 = \pi \cdot 4,5^2 = 20,25\pi$ см^2. $20,25\pi - 9\pi = 11,25\pi$; $11,25\pi : \pi = 11,25$. *Ответ*: 11,25.

4. *Ответ*: 12; 29.

День 64

5.1.6. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника

1*. Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма всех внутренних углов которого и всех внешних углов, взятых по одному при каждой вершине многоугольника, равна $1440°$.

1

2*. Число диагоналей выпуклого многоугольника равно 119. Найдите сумму его внутренних углов.

2

3*. Углы выпуклого шестиугольника пропорциональны числам $3:5:6:9:10:15$. Найдите эти углы. В ответ запишите разность величин большего и меньшего из них.

3

4*. Найдите число сторон выпуклого n-угольника, если три его угла составляют по $186°$, а остальные — по $126°$.

4

5*. Найдите сумму всех внутренних и внешних углов, взятых по одному при каждой вершине выпуклого пятиугольника.

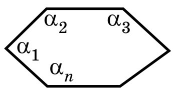
5

6*. В выпуклом многоугольнике сумма всех внутренних углов равна $2340°$. Найдите число диагоналей данного многоугольника.

6

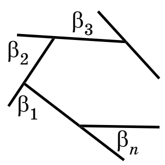
Ответы:

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$



$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=$
$=180°(n-2)$.

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$



$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=360°$.

1. Пусть n — искомое количество сторон, тогда сумма всех внутренних углов данного многоугольника равна $180°(n-2)$, а сумма всех внешних углов, внешних по одному при каждой его вершине, — $360°$. Так как по условию сумма всех и внутренних, и внешних углов — $1440°$, то $180°(n-2)=1440°-360°$,

$$180°(n-2)=1080°,\ n-2=6,\ n=8.$$

Ответ: 8.

2. Найдем n — число сторон данного многоугольника. Известно, что число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Так как в данном многоугольнике 119 диагоналей, то

$$\frac{n(n-3)}{2}=119,\quad n(n-3)=238,\quad n^2-3n-238=0,$$

$n_1=17$; $n_2=-14$ — не удовлетворяет условию задачи. Значит, в данном многоугольнике 17 сторон, а сумма его углов: $180°(n-2)=180°\cdot(17-2)=180°\cdot15=2700°$.

Ответ: $2700°$.

3. Сумма всех углов данного шестиугольника равна:

$$180°(6-2)=180°\cdot4=720°.$$

Пусть $x°$ — величина одной части, тогда величины искомых углов равны $3x°$; $5x°$; $6x°$; $9x°$; $10x°$; $15x°$.

Получим уравнение:

$$3x+5x+6x+9x+10x+15x=720;$$

$$48x=720;\quad x=720:48;\quad x=15.$$

Значит, углы шестиугольника равны: $3\cdot15°=45°$; $5\cdot15°=75°$; $6\cdot15°=90°$; $9\cdot15°=135°$; $10\cdot15°=150°$; $15\cdot15°=225°$. Разность большего и меньшего из них:

$$225°-45°=180°.$$

Ответ: $180°$.

4. Сумма всех углов n-угольника равна $180°(n-2)$, с другой стороны: $3\cdot186°+(n-3)\cdot126°$. Составим и решим уравнение:

$$180(n-2)=3\cdot186+126(n-3);$$

$$180n-360=558+126n-378;$$

$$54\cdot n=540,\quad n=540:54;\quad n=10.$$

Ответ: 10.

5. *Ответ*: 900.

6. *Ответ*: 90.

День 65

5.1.7. Правильные многоугольники. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника

1*. Найдите количество сторон правильного многоугольника, внешний угол которого составляет $\frac{1}{3}$ внутреннего угла многоугольника.

1

2*. В окружность радиуса $10\sqrt{2}$ см вписан правильный треугольник. В этот треугольник вписана окружность, а в окружность — квадрат. Найдите сторону квадрата.

3

3*. Найдите площадь квадрата, вписанного в окружность, если площадь правильного шестиугольника, описанного около этой окружности, равна $24\sqrt{3}$ см^2.

4

4*. Найдите количество сторон правильного многоугольника, каждый угол которого равен $160°$.

2

5*. Найдите количество сторон правильного многоугольника, внутренний угол которого на $100°$ больше его внешнего угла.

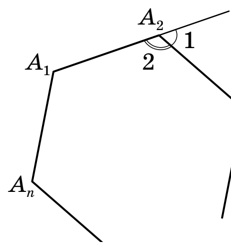
5

6*. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей правильного треугольника, если их разность равна 11 см.

6

Ответы:

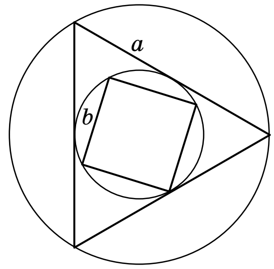
1 Так как $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — данный правильный многоугольник (n — число его сторон), то все его внутренние углы равны (пусть $\angle 2$ — внутренний угол при вершине A_2), все внешние углы равны ($\angle 1$ — внешний угол при вершине A_2). Пусть $\angle 1 = x°$, тогда



$\angle 2 = 3x°$; $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $x + 3x = 180$; $4x = 180$, $x = 45$.

Значит, $\angle 1 = 45°$. Сумма всех внешних углов $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ равна $360°$, поэтому $360° : 45° = 8$. Искомое число сторон — 8.
Ответ: 8.

2. $a = R\sqrt{3}$, где R — радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a. $a = 2r\sqrt{3}$, где r — радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a. Тогда $R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$, $R = 2r$.



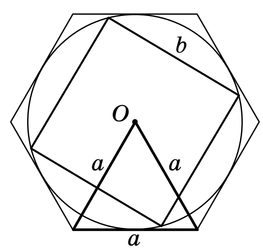
Отсюда $r = \dfrac{R}{2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ (см).

Но окружность, вписанная в треугольник, является окружностью, описанной около квадрата, по условию данной задачи. $b = r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, описанной около квадрата со стороной b.

Итак, $b = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5 \cdot 2 = 10$ см.
Ответ: 10.

3. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна сумме площадей шести правильных треугольников со стороной a.

$$S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Но по условию: $S = 24\sqrt{3}$ см^2, тогда

$\dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$; $\dfrac{a^2}{4} = 4$; $a^2 = 16$; $a = 4$ см. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см. Сторона квадрата (b), вписанного в эту окружность, равна $b = r\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ см.

Площадь квадрата: $b^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = 4 \cdot 6 = 24$ см^2.
Ответ: 24.

4. *Ответ*: 18.

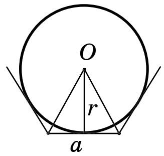
5. *Ответ*: 9.

6. *Ответ*: 11; 22.

Радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180°}{n}},$$

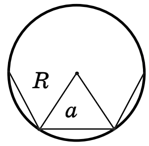
где a — сторона многоугольника, n — количество сторон (углов)



Радиус окружности, описанной около правильного *n*-угольника

$$R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}},$$

где a — сторона многоугольника



День 66

5.2. Прямые и плоскости в пространстве

5.2.1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Перпендикулярные прямые

1*. Дана прямая a и точка M $(M \notin a)$. Сколько существует разных прямых, которые проходят через точку M, пересекают прямую a и перпендикулярны к ней?

2

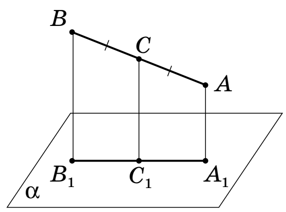
2*. Плоскость α пересекает стороны AB и AC $\triangle ABC$ в точках B_1 и C_1 соответственно. $BC \parallel \alpha$. $B_1C_1 = 1$ см. $BB_1 : B_1A = 3 : 1$. Найдите BC.

3

3*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Площадь треугольника, который образовался при пересечении прямых AB_1, B_1D_1 и AD_1 равна $\sqrt{12}$. Найдите длину ребра куба.

4

4*. Отрезок AB не пересекает плоскость α. $AC = CB$, $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$. $BB_1 = 4$; $CC_1 = 3$. Найдите AA_1.



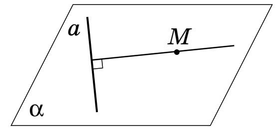
5

5*. Заданы скрещивающиеся прямые a и b. Сколько существует разных плоскостей, которые проходят через прямую a и параллельны прямой b?

6

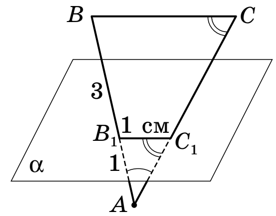
Ответы:

1. Через прямую a и точку M можно провести единственную плоскость α, а в этой плоскости через точку M — единственную прямую, перпендикулярную прямой a.



Ответ: 1.

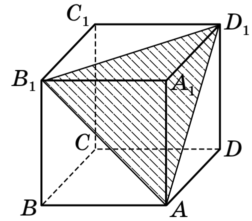
2. Прямые BC и B_1C_1 лежат в одной плоскости $(\triangle ABC)$ и не имеют общих точек, поскольку $BC \parallel \alpha$. Значит, $B_1C_1 \parallel BC$. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны по двум углам. Тогда



$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AB_1}; \quad \frac{BC}{1} = \frac{3+1}{1}; \quad BC = 4.$$

Ответ: 4.

3. При пересечении прямых AB_1, B_1D_1 и AD_1 получился равносторонний $\triangle AB_1D_1$, т. к. стороны треугольника — диагонали равных квадратов.



$$S_{\triangle AB_1D_1} = \frac{AB_1^2\sqrt{3}}{4}; \text{ или } \frac{AB_1^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{12};$$

$$AB_1^2 = \frac{4 \cdot \sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8; \quad AB_1 = 2\sqrt{2}.$$

Из $\triangle ABB_1$: $AB^2 + BB_1^2 = AB_1^2$; $AB = BB_1$, поэтому

$$2AB^2 = 8; \quad AB^2 = 4; \quad AB = 2.$$

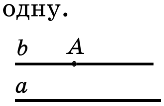
Ответ: 2.

4. *Ответ*: 2.

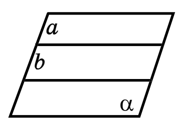
5. *Ответ*: 1.

Свойства параллельных прямых

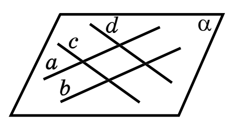
Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную ей, и причем только одну.



Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

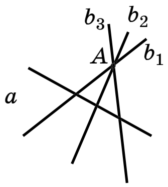


Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

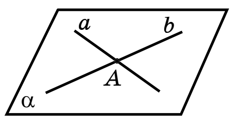


Свойства пересекающихся прямых

Через точку вне данной прямой можно провести бесконечное множество прямых, пересекающих данную прямую.

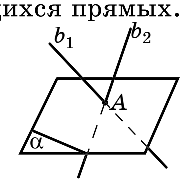


Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

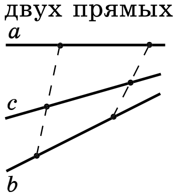


Свойства скрещивающихся прямых

Через точку вне данной прямой можно провести бесконечное множество скрещивающихся прямых.



Для любых двух скрещивающихся прямых в пространстве существует третья прямая, которая является скрещивающейся для каждой из данных двух прямых.



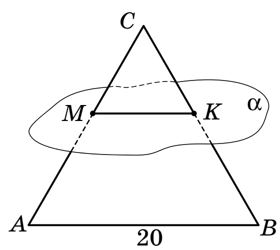
День 67

5.2.2. Параллельность прямой и плоскости

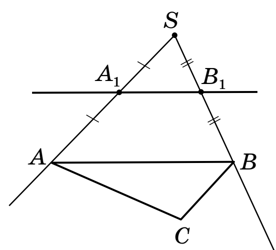
1*. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α, а сторона CD не лежит на ней. Как расположена прямая CD относительно α?
1) пересекает α;
2) лежит в α;
3) параллельна α;
4) перпендикулярна α.
В ответ запишите цифру, под которой записано верное утверждение.

2*. Прямая a параллельна плоскости α. Через точки A и B прямой a проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите площадь четырехугольника AA_1B_1B, если $A_1B_1 = 13$ см; $AA_1 = 14$ см; $A_1B = 15$ см.

3*. Плоскость α параллельна стороне AB треугольника ABC и пересекает его в точках M и K. M — середина AC. Найдите MK, если $AB = 20$ см.



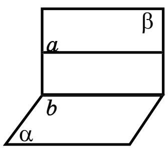
4*. Точка S не принадлежит плоскости ABC. Точки A_1 и B_1 — середины отрезков SA и SB соответственно. Каково взаимное расположение A_1B_1 и плоскости ABC? (В ответ запишите цифру, под которой записано верное утверждение).
1) пересекаются;
2) параллельны;
3) A_1B_1 принадлежит ABC;
4) перпендикулярны.



Ответы:

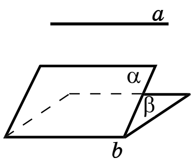
Свойства прямой, параллельной плоскости

1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

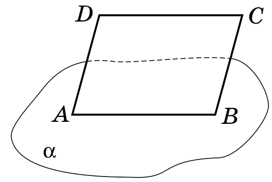


Если $a \parallel \alpha$ и $a \subset \beta$, то $a \parallel b$.

2. Если прямая параллельна двум плоскостям, которые пересекаются и которым не принадлежит данная прямая, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.

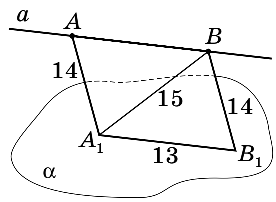


1. Прямые AB и CD параллельны как противоположные стороны параллелограмма, при этом прямая AB лежит в плоскости α. По признаку параллельности прямой и плоскости прямая $DC \parallel \alpha$, т. к. она параллельна прямой AB, лежащей в этой плоскости.



Ответ: 3.

2. По условию $AB \parallel \alpha$, через точки A и B провели $AA_1 \parallel BB_1$, т. е. плоскость ABB_1A_1 пересекает α и линия пересечения $A_1B_1 \parallel AB$. Поэтому AA_1B_1B — параллелограмм.



$AA_1 = BB_1 = 14$ см как противоположные стороны параллелограмма. Найдем площадь $S_{\triangle A_1BB_1}$ по формуле Герона.

$$S_{\triangle A_1BB_1} = \sqrt{p\left(p - A_1B\right)\left(p - BB_1\right)\left(p - A_1B_1\right)},$$

где $p = \dfrac{A_1B + BB_1 + A_1B_1}{2} = \dfrac{15 + 14 + 13}{2} = 21$ см — полупериметр $\triangle A_1BB_1$.

$$S_{\triangle A_1BB_1} = \sqrt{21 \cdot (21 - 15) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 13)} =$$
$$= \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84 \text{ см}.$$

Очевидно, что площадь искомого четырехугольника $ABCD$

$$S_{ABCD} = 2S_{A_1BB_1} = 2 \cdot 84 = 168 \text{ см}^2.$$

Ответ: 168.

3. *Ответ*: 10.

4. *Ответ*: 2.

День 68

5.2.3. Параллельность плоскостей

1*. Точка M находится вне плоскости $\triangle ABC$. Точки A_1, B_1 и C_1 соответственно — середины отрезков MA, MB и MC. Определите взаимное расположение плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите периметр $\triangle ABC$, если периметр треугольника $\triangle A_1B_1C_1$ равен 12.

1

2*. Площадь $\triangle ABC$ (см. задачу 1) равна 24 см^2. Найдите площадь $\triangle A_1B_1C_1$.

2

3*. Две параллельные плоскости α и β пересекают сторону BA угла ABC в точках D и D_1, а сторону BC соответственно в точках E и E_1. Известно, что $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см. Найдите длину отрезка DE.

3

4*. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. Сколько существует разных плоскостей, проходящих через прямую m и параллельных прямой n?

4

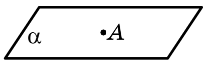
5*. Точка M находится вне плоскости $\triangle ABC$. Точки A_1, B_1 и C_1 соответственно — середины отрезков MA, MB и MC. Площадь $\triangle A_1B_1C_1 = 10$ см^2. Найдите площадь $\triangle ABC$.

5

Ответы:

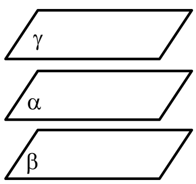
Свойства параллельных плоскостей

Через точку, лежащую вне данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной плоскости, и притом только одну.

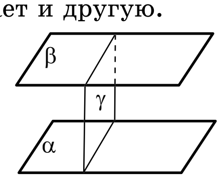


Если две различные плоскости параллельны третьей плоскости, то они параллельны между собой.

Если $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha \parallel \gamma$, то $\beta \parallel \gamma$

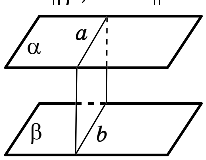


Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

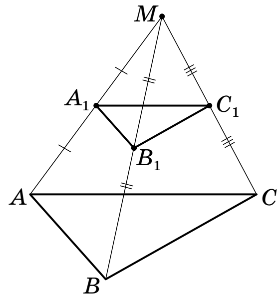


Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

Если $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$.



1. Рассмотрим $\triangle AMB$. По условию $AA_1 = A_1M$ и $BB_1 = B_1M$. Значит, A_1B_1 — средняя линия $\triangle AMB$.



Тогда $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$.

Аналогично A_1C_1 — средняя линия $\triangle AMC$ и $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1C_1 = \dfrac{1}{2}AC$.

Тогда плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости ABC ($A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1C_1 \parallel AC$) по признаку параллельности плоскостей.

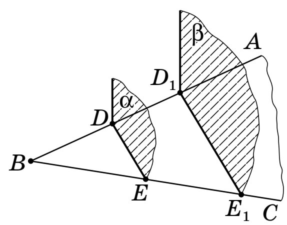
Кроме того $P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle A_1B_1C_1} = 12 \cdot 2 = 24$, т. к. стороны $\triangle ABC$ вдвое больше сторон $\triangle A_1B_1C_1$.

Ответ: 24.

2. Поскольку $ABC \parallel A_1B_1C_1$ и при этом каждая сторона $\triangle A_1B_1C_1$ вдвое меньше соответственной стороны $\triangle ABC$ (свойство средней линии треугольника), то площадь $\triangle A_1B_1C_1$ вчетверо меньше площади $\triangle ABC$. $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle A_1B_1C_1}$, поэтому $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 24 : 4 = 6$ см^2.

Ответ: 6.

3. По условию $\alpha \parallel \beta$ и пересекают сторону BA в точках D и D_1, а сторону BC — в точках E и E_1, значит, плоскость α пересекает плоскость угла ABC по прямой DE, а плоскость β — по прямой D_1E_1. А если две параллельные плоскости пересечены третьей (ABC), то линии пересечения параллельны; $DE \parallel D_1E_1$. Поэтому $\triangle DBE$ подобен $\triangle D_1BE_1$.



Тогда

$$\frac{D_1E_1}{DE} = \frac{BD_1}{BD}; \quad \frac{54}{DE} = \frac{18}{12}; \quad DE = \frac{12 \cdot 54}{18} = 36.$$

День 69

5.2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная

1*. Расстояние от точки A до всех вершин квадрата равно 10 см. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна 12 см.

1

2*. Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых относятся как $5:6$. Найдите расстояние от точки до плоскости, если проекции наклонных 4 см и $3\sqrt{3}$ см.

2

3*. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 9 см. Найдите проекцию перпендикуляра на наклонную.

3

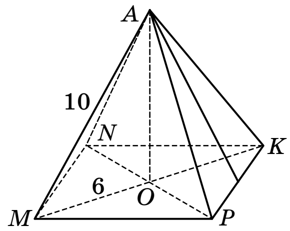
4*. Из точки к плоскости проведен перпендикуляр длиной 12 и наклонная, проекция которой равна 5. Найдите проекцию перпендикуляра на наклонную. Ответ округлите до десятых.

4

Ответы:

1. Квадрат $MNKP$ имеет диагональ $MK = 12$ см. Точка A равноудалена от всех вершин квадрата и

$$AM = AP = AN = AK = 10 \text{ см.}$$

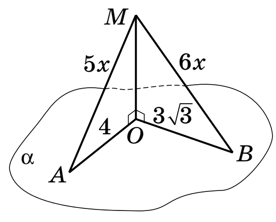


Проведем $AO \perp MNKP$. AO — расстояние от точки A до плоскости квадрата, и NO, MO, PO и KO — проекции равных наклонных, т. е. они равны между собой. Значит, точка O — точка пересечения диагоналей квадрата и $OM = 6$ см. Так как $AO \perp MNKP$ и MO лежит в плоскости $MNKP$, то $MO \perp OA$, $\triangle AOM$ — прямоугольный $(\angle AOM = 90^\circ)$.

$$AO^2 = AM^2 - MO^2 = 10^2 - 6^2 = 64; \quad AO = 8 \text{ см.}$$

Ответ: 8.

2. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MO и наклонные MA и MB.
AO и OB — проекции этих наклонных. $MB : MA = 5 : 6$. Тогда $MB = 6x$, $MA = 5x$, проекции $AO = 4$ см;



$OB = 3\sqrt{3}$ см. Из $\triangle AOM$
$(\angle AOM = 90^\circ)$: $MO^2 = AM^2 - AO^2 = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16.$

Из $\triangle MOB$ $(\angle MOB = 90^\circ)$:

$MO^2 = MB^2 - BO^2 = (6x)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 36x^2 - 27.$

Получим уравнение:

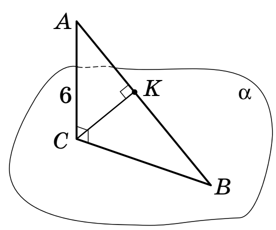
$$25x^2 - 16 = 36x^2 - 27; \quad 36x^2 - 25x^2 = 27 - 16;$$

$$11x^2 = 11; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1. \text{ Но } x > 0, \text{ поэтому } x = 1.$$

Тогда $MO^2 = MA^2 - AO^2 = 25x^2 - 16 = 25 \cdot 1 - 16 = 9$ см^2.
$MO = 3$ см.

Ответ: 3.

3. Из точки A $(A \notin \alpha)$ провели перпендикуляр $AC = 6$ см и наклонную $AB = 9$ см. CB — проекция наклонной на плоскость α. Проведем $CK \perp AB$. Тогда AK — проекция перпендикуляра AC на наклонную AB. Катет AC — среднее пропорциональное между гипотенузой AB и проекцией AK.



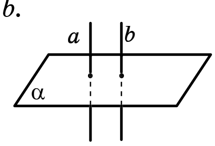
$$AC^2 = AB \cdot AK. \text{ Тогда } AK = \frac{AC^2}{AB} = \frac{36}{9} = 4 \text{ (см).}$$

Ответ: 4.

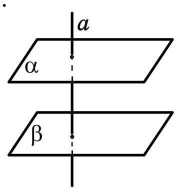
4. *Ответ*: 11,1.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

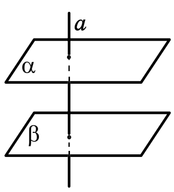
Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.
Если $a \perp \alpha$ и $a \parallel b$, то $b \perp \alpha$.
Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.



Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.
Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$.



Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.
Если $a \perp \alpha$ и $a \perp \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.



День 70

5.2.4. Теорема о трех перпендикулярах

1*. В $\triangle ABC$ $AB = 15$ см; $AC = 13$ см; $CB = 14$ см. Из вершины A проведен перпендикуляр AK к его плоскости, длина перпендикуляра равна 16 см. Найдите расстояние от точки K до стороны BC.

	1

2*. Точка M находится на одинаковом расстоянии от всех сторон правильного треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ см и удалена от плоскости треугольника на 8 см. Найдите расстояние от точки M до сторон треугольника.

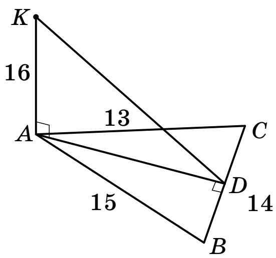
	2

3*. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, больший катет 6 см. Из вершины угла B проведен перпендикуляр $BK = 2\sqrt{6}$ см к плоскости $\triangle ABC$. Найдите расстояние от точки K до AC.

	3

Ответы:

1. Определим вид $\triangle ABC$. $AB^2 < AC^2 + BC^2$, т. к. $15^2 < 14^2 + 13^2$.



Значит, $\triangle ABC$ — остроугольный и высота, проведенная из точки A, будет лежать в плоскости $\triangle ABC$.
Проведем $AD \perp BC$, соединим точку K и точку D. По теореме о трех перпендикулярах $KD \perp BC$ и KD — расстояние от точки K до BC.
Найдем площадь треугольника ABC по формуле Герона.

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)},$$

где $p = \dfrac{AB+BC+AC}{2} = \dfrac{15+13+14}{2} = 21$, p — полупериметр.

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84 \text{ см}^2.$$

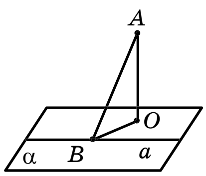
Но $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AD$, поэтому $AD = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2 \cdot 84}{14} = 12$ см.

$KA \perp ABC$ и AD лежит в плоскости ABC, поэтому $KA \perp AD$ и $\triangle KAD$ — прямоугольный $(\angle KAD = 90^\circ)$. По теореме Пифагора $KD^2 = AK^2 + AD^2 = 16^2 + 12^2 = 400$ см^2. $KD = 20$ см.
Ответ: 20.

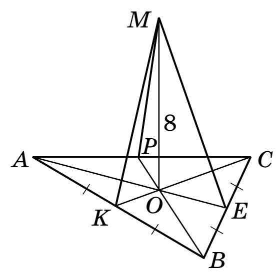
Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна наклонной проекции, то она перпендикулярна наклонной.
Если $a \perp BO$, то $a \perp AB$.

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.
Если $a \perp AB$, то $a \perp BO$.



2. Пусть дан $\triangle ABC$, в котором $AB = BC = AC = 12\sqrt{3}$ см и точка $M \notin ABC$. $MO \perp ABC$; $MO = 8$ см.
Точка M одинаково удалена от сторон треугольника, т. е. $MK \perp AB$; $ME \perp BC$ и $MP \perp AC$.



При этом $MK = MP = ME$.
Наклонные MK, MP и ME перпендикулярны сторонам $\triangle ABC$, тогда стороны AB, AC и BC перпендикулярны проекциям данных наклонных KO, PO и EO по теореме о трех перпендикулярах. Наклонные MK, MP и ME равны, поэтому и проекции OK, OP и OE равны. Значит, точка O равноудалена от всех сторон $\triangle ABC$ и поэтому является центром окружности, вписанной в $\triangle ABC$, $OK = r$ — ее радиус. В равностороннем треугольнике $r = OK = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6} = \dfrac{12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 6$ см. Тогда из $\triangle MOK$ $(\angle MOK = 90^\circ$, т. к. $MO \perp ABC)$ по теореме Пифагора $MK^2 = KO^2 + MO^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$MK = 10$ см.
Ответ: 10.

3. *Ответ*: 6.

День 71

5.2.5. Перпендикулярность плоскостей
5.2.6. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

1*. На изображении ромба $ABCD$ построили изображение его высоты BK. Найдите отношение $AK : AD$, если угол ромба равен 45°. Ответ округлите до десятых.

1

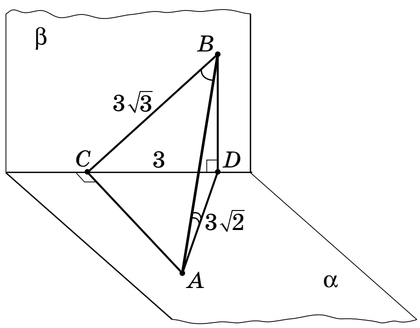
2*. Концы отрезка лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Проекции отрезка на каждую из плоскостей соответственно равны $\sqrt{369}$ см и 20 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к плоскости, равно 12 см. Найдите длину этого отрезка.

2

3*. На изображении ромба $ABCD$ построили изображение его высоты BK. Найдите отношение $AK : AD$, если угол ромба равен 60°.

3

4*. Из концов отрезка, принадлежащего двум взаимно перпендикулярным плоскостям, к линии пересечения проведены перпендикуляры, расстояние между основаниями которых 3 см. Проекции отрезка на эти плоскости равны $3\sqrt{2}$ см и $3\sqrt{3}$ см.



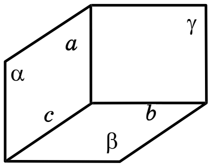
Найдите углы, образованные отрезком с этими плоскостями. В ответ запишите их сумму.

4

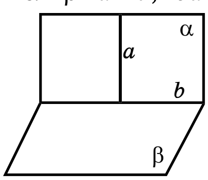
Ответы:

Свойства перпендикулярных плоскостей

Любая плоскость, перпендикулярная прямой пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым. Если $\alpha \perp \beta$ и $\gamma \perp c$, то $a \perp b$.

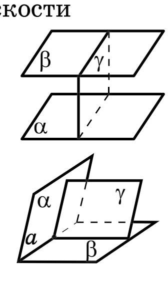


Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна прямой их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.
Если $\alpha \perp \beta$ и $a \perp b$, то $a \perp \beta$.



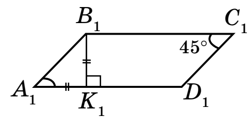
Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

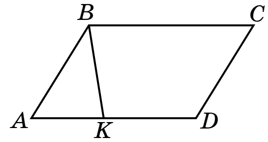
Две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, или параллельны, или пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости



1. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — ромб, $\angle A_1 = 45°$, $B_1K_1 \perp A_1D_1$. Тогда $\angle A_1K_1B_1 = 90°$, $\angle B_1A_1K_1 = \angle A_1K_1B_1 = 45°$ и $\triangle A_1K_1B_1$ — равнобедренный прямоугольный. Пусть сторона ромба $A_1B_1 = a$, тогда

$$A_1K_1 = a\cos A_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



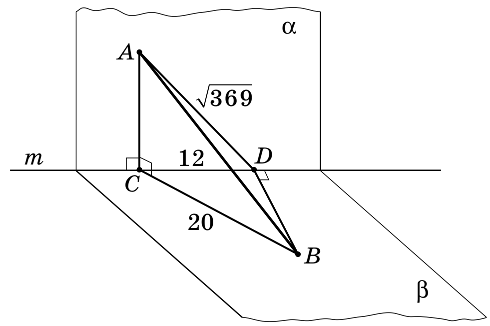


Тогда отношение

$$AK : AD = A_1K_1 : A_1D_1.$$

Ответ: 0,7.

2. Пусть $\alpha \perp \beta$, концы отрезка AB лежат в двух этих плоскостях, т. е. $A \in \alpha$ и $B \in \beta$, m — линия пересечения этих плоскостей.



Проведем $AC \perp m$. Тогда $AC \perp \beta$, поскольку если перпендикуляр проведен к линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей, то он перпендикулярен и к другой плоскости. Тогда $AC \perp CB$, CB — проекция AB на плоскость β. $CB = 20$ см. Аналогично AD — проекция AB на плоскость α. $AD = \sqrt{369}$ см. Расстояние между перпендикулярами AC и BD равно 12 см, т. е. $CD = 12$ см.

Рассмотрим $\triangle ACD$ $(\angle ACD = 90°)$; по теореме Пифагора $AC^2 = AD^2 - CD^2 = 369 - 144 = 225$ см, $AC = 15$ см.

Рассмотрим $\triangle ACB$ $(\angle ACB = 90°)$. $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 15^2 + 20^2 = 625$ см^2. $AB = 25$ см.

Ответ: 25.

3. *Ответ*: 0,5.

День 72

5.3. Многогранники

5.3.1. Призма

1. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

1

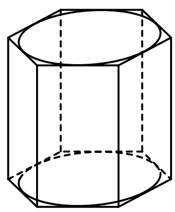
2. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 24, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

2

3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

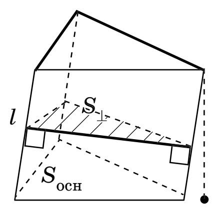
3

4. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



4

Ответы:



Объем призмы
$V=S_{осн.}\cdot H;$
$V=S_\perp\cdot l.$

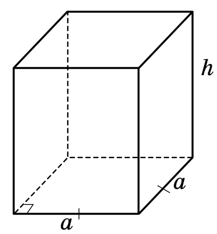
Площадь боковой поверхности прямой призмы

$S_{бок.}=P_{осн.}\cdot l.$

Объем прямой призмы

$V=S_{осн.}\cdot l.$

1. Дана правильная четырехугольная призма, значит, основание ее — квадрат со стороной $a = 20$. Высота h перпендикулярна основанию. Площадь поверхности призмы равна $S = 2a^2 + 4a \cdot h$, а по условию 1760, т. е. $2a^2 + 4a \cdot h = 1760$. Учитывая, что $a = 20$, получим

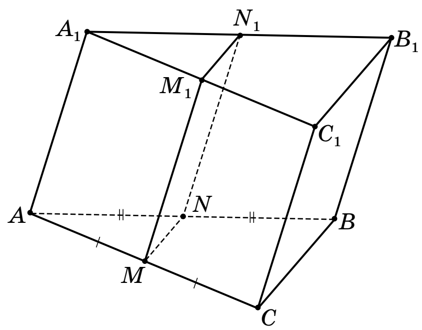


$2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot h = 1760; \quad 800 + 40h = 1760;$

$h = \dfrac{1760 - 800}{40} = 24.$

Ответ: 24.

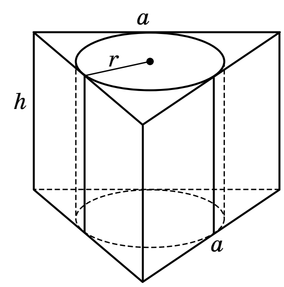
2. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь боковой поверхности которой равна $S_б = 24$.
Через среднюю линию MN основания ABC провели плоскость $MM_1N_1N \parallel AA_1$.
Надо найти площадь боковой поверхности призмы $AMNA_1M_1N_1$.



Площадь боковой поверхности искомой призмы состоит из площадей трех граней: AA_1M_1M; AA_1N_1N и MM_1N_1N. Параллелограмм AA_1M_1M имеет площадь вдвое меньше площади параллелограмма AA_1C_1C, поскольку $AM = \dfrac{1}{2}AC$, а высоты этих параллелограммов равны. Аналогично $S_{AA_1N_1N} = \dfrac{1}{2}S_{AA_1B_1B}$ и $S_{MM_1N_1N} = \dfrac{1}{2}S_{CC_1B_1B}$.

Таким образом, площадь боковой поверхности искомой призмы в два раза меньше площади боковой поверхности данной призмы и равна $24 : 2 = 12$.
Ответ: 12.

3. В правильную треугольную призму вписали цилиндр, очевидно, что высота цилиндра совпадет с высотой призмы и равна $h = 2$. Радиус цилиндра является радиусом окружности, вписанной в основание, $r = \sqrt{3}$, а сторона основания призмы вычисляется по формуле



$$a = 2\sqrt{3} \cdot r = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

Боковая поверхность данной призмы

$$S = 3 \cdot a \cdot h = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36.$$

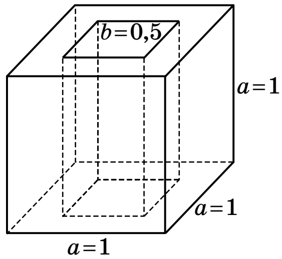
Ответ: 36.

4. *Ответ*: 24.

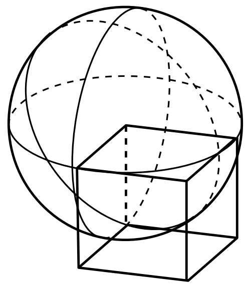
День 73

5.3.2. Параллелепипед. Куб

1. Из единичного куба вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

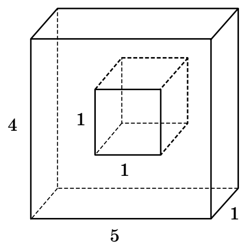


2. Вершина куба со стороной 1,6 является центром шара. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



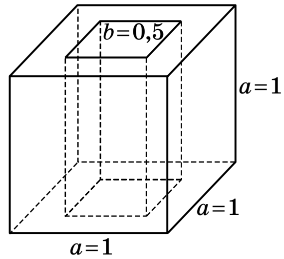
3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



5. Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

Ответы:

1. 

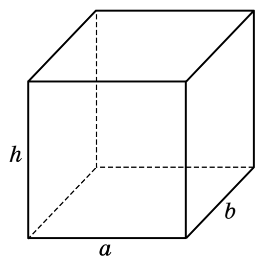
Площадь поверхности образовавшейся фигуры состоит из:
а) боковой поверхности куба: четыре квадрата площадью $4 \cdot 1 = 4$;
б) двух оснований с отверстиями: $2 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 2 - 0,5 = 1,5$ (отверстия — квадраты со стороной 0,5);
в) поверхности, образованной четырьмя прямоугольниками, вырезанными из куба, площадью $4 \cdot 1 \cdot 0,5 = 2$.
Итого, площадь поверхности получившейся фигуры составит: $4 + 1,5 + 2 = 7,5$.
Ответ: 7,5.

2. Вершина куба со стороной 1,6 является центром шара, поэтому радиус шара $R = 1,6$.
Площадь поверхности шара, т. е. сферы, вычислим по формуле $S_{сф} = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1,6^2$.
Площадь поверхности шара, находящаяся внутри куба, составляет $\frac{1}{8}$ поверхности всего шара, поэтому

$$S = \frac{1}{8} S_{сф} = \frac{4\pi \cdot 1,6 \cdot 1,6}{8} = \pi \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 1,28\pi.$$

В ответ запишем $\frac{S}{\pi} = \frac{1,28\pi}{\pi} = 1,28$.

Ответ: 1,28.

3. 

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины: $a = 4$, $b = 3$. Тогда площадь основания $S_{осн} = 4 \cdot 3 = 12$.

Площадь поверхности параллелепипеда $S_{пов} = 94$. Тогда площадь боковой поверхности $S_{бок} = 94 - 2 \cdot 12 = 94 - 24 = 70$.

Но $S_{бок} = h \cdot P = 2h \cdot (a + b)$, тогда

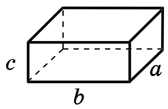
$$h = \frac{S_{бок}}{2(a + b)} = \frac{70}{2(3 + 4)} = 5.$$

Ответ: 5.

4. *Ответ*: 60.

5. *Ответ*: 24.

Прямоугольный параллелепипед



Площадь боковой поверхности

$S = 2(a+b)c$,

где a, b — стороны основания, c — боковое ребро.

Площадь поверхности

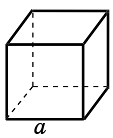
$S = 2(ab+bc+ac)$,

где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Объем

$V = abc$.

Куб



Площадь боковой поверхности

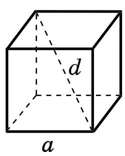
$S_{бок.} = 4a^{2.}$

Площадь поверхности

$S = 6a^2$,

где a — ребро куба.

Объем



$V = a^3$,

где a — ребро куба.

$V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$,

где d — диагональ куба.

День 74

5.3.3. Пирамида: основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида

1*. Во сколько раз увеличится боковая поверхность правильной треугольной пирамиды, если стороны основания увеличить в 2 раза, а апофему — в 3 раза?

1

2*. Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Двугранный угол при основании равен $30°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2

3*. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Боковые грани наклонены к основанию под углом $60°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

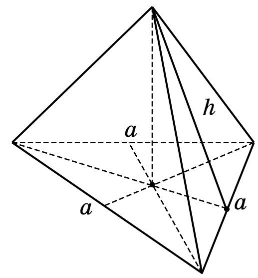
3

4*. Во сколько раз увеличится объем четырехугольной правильной пирамиды, если сторону основания увеличить в 3 раза, а высоту — в 2 раза?

4

Ответы:

1. Пусть $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания — a, апофема — h. Тогда

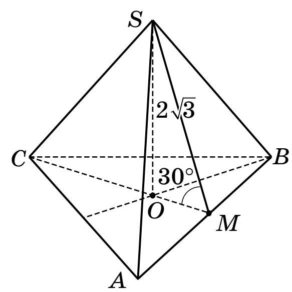


$$S_{бок} = \frac{3ah}{2} = 1,5ah.$$

Увеличим сторону пирамиды вдвое, т. е. длина стороны будет $2a$, а апофему в 3 раза, т. е. $3h$. Тогда новая площадь боковой поверхности будет $S_{бок_1} = \dfrac{3 \cdot 2a \cdot 3h}{2} = 9ah.$

Значит, площадь увеличилась в $\dfrac{S_{бок_1}}{S_{бок}} = \dfrac{9ah}{1,5ah} = 6$ раз.
Ответ: 6.

2. Пусть $SABC$ — данная пирамида. Проведем $SM \perp AB$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$ и $\angle SMO = 30^\circ$ — двугранный угол при основании.



Высота $SO = 2\sqrt{3}$.
Из $\triangle SOM$ $(\angle SOM = 90^\circ)$:
$OM = SO \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6.$

В правильном $\triangle ABC$ $AB = 2r\sqrt{3}$, где $r = OM$ — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

$$AB = 2r\sqrt{3} = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(12\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{144 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды, у которой все двугранные углы при основании равны α, вычисляем по формуле:

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}, \text{ т. е. } S_{бок} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos 30^\circ};$$

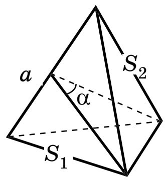
$$S_{бок} = 108\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{108\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 216.$$

Ответ: 216.

3. *Ответ*: 12.

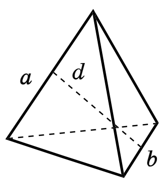
4. *Ответ*: 18.

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды)



$$V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a},$$

где S_1, S_2 — площади двух граней,
a — длина общего ребра,
α — двугранный угол при ребре a.



$$V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi,$$

где a, b — два противоположных ребра тетраэдра,
d — расстояние между ними,
φ — угол между ними.

День 75

5.3.3. Пирамида. Правильная пирамида

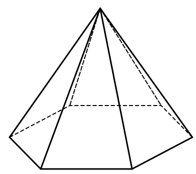
1. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

1

2*. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания. Ответ округлите до десятых.

2

3. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



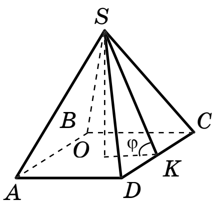
3

4*. Высота правильной четырехугольной пирамиды — 7, а сторона основания — 8. Найдите боковое ребро пирамиды.

4

Ответы:

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды



- равна произведению полупериметра основания на апофему:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2};$$

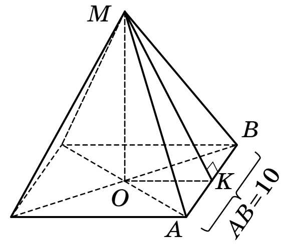
- равна отношению площади основания на косинус угла наклона боковой грани к основанию:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

- равна произведению площади одной боковой грани на их количество:

$$S_{\text{бок.}} = S_{\text{гр.}} \cdot n.$$

1. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, т. е. $AB = 10$; боковые ребра равны 13, т. е. $MB = 13$. Боковые грани пирамиды — равнобедренные треугольники.

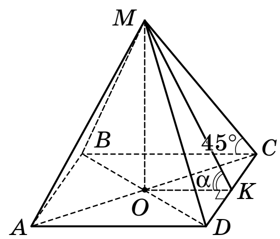


Рассмотрим один из этих треугольников — $\triangle AMB$.
Проведем высоту $MK \perp AB$, тогда $AK = 5$, поскольку MK — высота и медиана.
Из $\triangle AMK$ $(\angle AKM = 90°)$ по теореме Пифагора, $MK^2 = AM^2 - AK^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $MK = 12$.

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

Значит, площадь боковой поверхности пирамиды $S_{\text{бок}} = 4 \cdot 60 = 240$. Площадь основания $S_{\text{осн}} = AB^2 = 10^2 = 100$. Тогда $S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 240 + 100 = 340$.
Ответ: 340.

2. Пусть $MABCD$ — данная пирамида, угол наклона бокового ребра 45°, т. е. $\angle MCO = 45°$.
Пусть боковые ребра равны по x, т. е.



$$MA = MB = MC = MD = x.$$

Точка O — точка пересечения диагоналей квадрата и основание высоты MO.
Проведем $MK \perp CD$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OK \perp CD$ и $\angle MKO$ — угол наклона боковой грани к плоскости основания. Найдем $\operatorname{tg} \angle MKO$.

Из $\triangle MOC$ $(\angle MOC = 90°)$: $OC = MC \cos 45° = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$;
$OM = MC \cdot \sin 45° = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Из $\triangle OKC$ ($\angle OKC = 90°$ и $\angle OCK = 45°$, поскольку диагонали квадрата делят углы пополам):

$$OK = OC \cdot \sin 45° = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2}.$$

Рассмотрим $\triangle OKM$ $(\angle MOK = 90°)$.

$$\operatorname{tg} \angle OKM = \frac{OM}{OK} = \frac{x\sqrt{2}}{2} : \frac{x}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{x} = \sqrt{2} \approx 1,4.$$

Ответ: 1,4.

3. *Ответ*: 360.

4. *Ответ*: 9.

День 76

5.3.4. Сечение куба, призмы, пирамиды

1*. В кубе провели секущую плоскость через середины смежных сторон нижнего основания и наиболее удаленную вершину верхнего основания. Найдите тангенс угла наклона образовавшегося сечения к основанию. Ответ округлите до сотых.

	1

2*. В тетраэдре $DABC$ проведена плоскость через медиану CM грани ABC параллельно ребру AD. Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно 4. Ответ округлите до десятых.

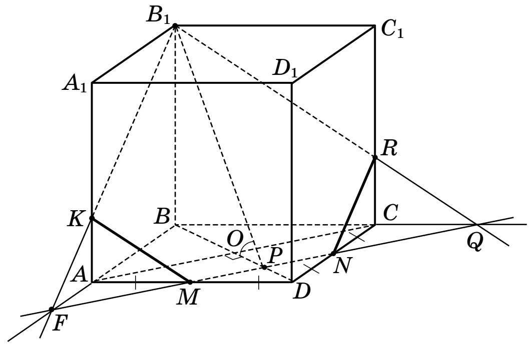
	2

3*. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2, а высота — 4. Ответ округлите до десятых.

	3

Ответы:

1. Построим сечение, проходящее через точки M и N — середины сторон AD и DC соответственно и точку B_1.



а) Проведем прямую MN до пересечения с прямыми AB и BC, получим соответственно точки пересечения F и Q.

б) Соединим точки F и B_1, прямая FB_1 пересечет AA_1 в точке K; соединим Q и B_1, прямая B_1Q пересечет CC_1 в точке R. KB_1RNM — искомое сечение.

$MN \parallel AC$, поскольку MN — средняя линия $\triangle ACD$.

$AC \perp BD$, поэтому $MN \perp BD$, а по теореме о трех перпендикулярах, $B_1P \perp MN$. $\angle B_1PB$ — угол наклона секущей плоскости к основанию. Пусть ребро куба равно a, тогда

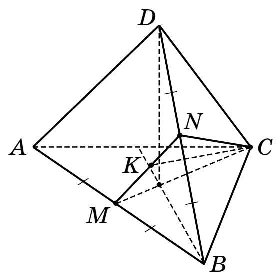
$$BB_1 = a, \quad BD = a\sqrt{2}; \quad BO = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$OP = PD = \frac{a\sqrt{2}}{4}; \quad BP = BO + OP = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\angle B_1PB = \frac{BB_1}{BP} = a : \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{4a}{3a\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \approx 0,95.$$

Ответ: 0,95.

2. Дан тетраэдр $DABC$ с ребром 4. Построим сечение:



а) проведем в грани ABD через точку M прямую $MN \parallel AD$. По теореме Фалеса $DN = NB$.

б) Через MN и MC проведем плоскость MNC. Она проходит через медиану MC и $MNC \parallel AD$, поскольку $MN \parallel AD$ и $MN \subset MNC$. MNC — искомая плоскость.

в) Найдем площадь $\triangle MNC$.

$MN = \dfrac{1}{2}AD = 2$, поскольку MN — средняя линия $\triangle ADB$.

$\triangle MNC$ — равнобедренный, т.к. $MC = CN$ как медианы равных равносторонних треугольников ABC и DBC. $KM = KN = 1$. MC — высота равностороннего $\triangle ABC$,

$MC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. По теореме Пифагора из $\triangle MKC$:

$CK^2 = CM^2 - KM^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 12 - 1 = 11$. $CK = \sqrt{11}$

$$S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2}MN \cdot KC = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \approx 3,3.$$

Ответ: 3,3.

3. *Ответ*: $2\sqrt{3} \approx 3,4$.

День 77

5.3.5. Правильные многогранники

1. Площадь поверхности тетраэдра равна 1. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.

1

2*. Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра. Во сколько раз объем куба больше объема октаэдра?

2

3*. Сколько граней имеет икосаэдр?

3

4*. Определите количество ребер додекаэдра.

4

5. Площадь поверхности тетраэдра равна 0,8. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.

5

Ответы:

Правильный тетраэдр

Площадь поверхности

$a^2\sqrt{3}$.

Объем

$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Радиус описанной сферы

$\frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Радиус вписанной сферы

$\frac{1}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Правильный октаэдр

Площадь поверхности

$2a^2\sqrt{3}$.

Объем

$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Радиус описанной сферы

$\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Радиус вписанной сферы

$\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Правильный икосаэдр

Площадь поверхности

$5a^2\sqrt{3}$.

Объем

$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$.

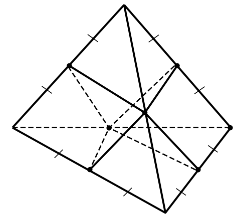
Радиус описанной сферы

$\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.

Радиус вписанной сферы

$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$.

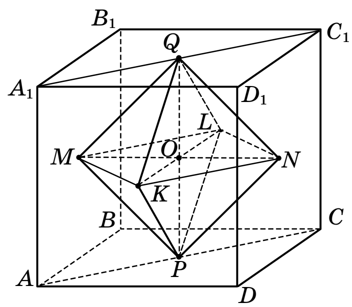
1. Пусть дан тетраэдр с площадью поверхности, равной 1. Тогда площадь каждой грани тетраэдра равна $\frac{1}{4}$, поскольку тетраэдр состоит из четырех правильных треугольников.



Если новый многогранник образован соединением середин сторон тетраэдра, то он будет иметь 8 граней, каждая из которых — правильный треугольник со сторонами, вдвое меньшими сторон тетраэдра, поскольку они являются средними линиями каждой грани. Тогда площадь каждой грани такого многогранника будет в 4 раза меньше грани тетраэдра, т. е. $\frac{1}{16}$. Очевидно, что получившийся многогранник — октаэдр, и площадь его поверхности составит $\frac{1}{16} \cdot 8 = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть сторона куба равна a. Тогда объем куба равен $V_к = a^3$. В куб вписан октаэдр — правильный восьмигранник, все грани которого — правильные треугольники. Вершины октаэдра находятся в центре граней куба, т. е. в точках пересечения диагоналей каждой грани. Поэтому $MN = KL = a$. $QP = a$.



Найдем объем тетраэдра, считая, что он состоит из двух пирамид $QMKNL$ и $PMKNL$ с высотами соответственно QO и OP.

Найдем объем одной такой пирамиды:

$$V_{пир} = \frac{1}{3}S_{MLNK} \cdot QO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} MN \cdot KL \cdot QO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{a}{2}$$

$$\left(QO = \frac{a}{2}\right). \ V_{пир} = \frac{a^3}{12}.$$

Значит, объем тетраэдра равен $V_т = \frac{2 \cdot a^3}{12}$; $V_т = \frac{a^3}{6}$.

Очевидно, что объем тетраэдра в 6 раз меньше объема куба $V_к = a^3$.

Ответ: 6.

3. *Ответ*: 20.

4. *Ответ*: 30.

5. *Ответ*: 0,4.

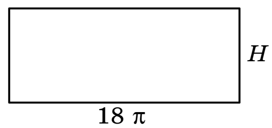
День 78

5.4. Тела и поверхности вращения

5.4.1. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка

1*. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{3}$ см и образует с основанием цилиндра угол 60°. Найдите высоту цилиндра.

2*. Развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник, большая сторона которого равна 18π см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, радиус основания которого в 3 раза меньше его высоты. В ответ запишите $\dfrac{S}{\pi}$.

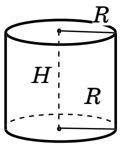


3*. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, которая пересекает его основание по хорде, стягивающей дугу 120°. Найдите площадь сечения, если отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой хорды нижнего основания, равен 11 см и образует с плоскостью основания угол 30°.

4*. Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной 10 см. Найдите боковую поверхность цилиндра. В ответ запишите $S : \pi$.

5*. Во сколько раз увеличится боковая поверхность цилиндра, если радиус его основания увеличится в 2 раза, а образующая — в 3 раза?

Ответы:



Площадь поверхности цилиндра

$S = S_{бок.} + 2S_{осн.}$,

$S = 2\pi(R + H)R$,

где R — радиус основания цилиндра, H — высота.

Площадь боковой поверхности

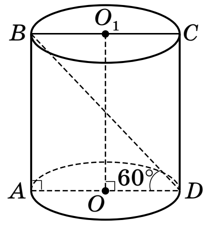
$S_{бок.} = 2\pi RH$.

Объем цилиндра

$V = S_{осн.} \cdot H = \pi R^2 H$,

где R — радиус основания, H — высота.

1. $ABCD$ — осевое сечение цилиндра с осью OO_1 (высотой OO_1), тогда $ABCD$ — прямоугольник, а образующая цилиндра AB является высотой цилиндра, т. е. $OO_1 = AB$.



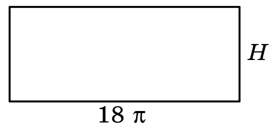
$\angle BDA = 60°$ — угол между диагональю BD и основанием цилиндра.

Из $\triangle BAD$, где $\angle BAD = 90°$:

$$AB = BD \cdot \sin \angle BDA = 6\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (см)}.$$

Ответ: 9.

2. Большая сторона данной развертки — длина окружности основания цилиндра (C). $C = 2\pi R$, где R — радиус основания цилиндра. По условию $C = 18\pi$ см, тогда $18\pi = 2\pi R$,



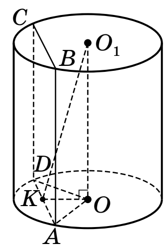
$$R = \frac{18\pi}{2\pi} = 9 \text{ см}.$$

Высота цилиндра: $H = 3 \cdot R = 3 \cdot 9 = 27$ см.

$S_{бок.} = 2\pi R \cdot H = 2\pi \cdot 9 \cdot 27 = 486\pi$ см^2, $\frac{S}{\pi} = \frac{486\pi}{\pi} = 486$ см^2.

Ответ: 486.

3. Прямоугольник $ABCD$ — сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси OO_1, AD — хорда основания, стягивающая дугу 120°, поэтому $\angle AOD = 120°$. K — середина AD. OK — проекция O_1K на плоскость основания, поэтому $\angle O_1KO = 30°$, $O_1K = 11$ см (по условию). Из $\triangle O_1OK$, где $\angle O_1OK = 90°$:



$$OO_1 = O_1K \cdot \sin \angle O_1KO = 11 \cdot \sin 30° = 11 \cdot \frac{1}{2} = 5,5 \text{ см}.$$

$$OK = O_1K \cdot \cos \angle O_1KO = 11 \cdot \cos 30° = \frac{11 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5,5\sqrt{3} \text{ см}.$$

В треугольнике AOD: OK — медиана, биссектриса, высота.

Из $\triangle AOK$:

$$AK = OK \cdot \operatorname{tg} \angle AOK = 5,5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle AOD}{2} = 5,5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{120°}{2} =$$

$$= 5,5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60° = 5,5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 5,5 \cdot 3 = 16,5 \text{ см}.$$

Итак, искомая площадь равна:

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = OO_1 \cdot 2 \cdot AK = 5,5 \cdot 2 \cdot 16,5 = 181,5$ см^2.

Ответ: 181,5.

4. *Ответ*: 100.

5. *Ответ*: 6.

День 79

5.4.2. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка

1*. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус основания конуса.

	1

2*. Площадь боковой поверхности конуса равна 196 $см^2$, а радиус его основания — $7\sqrt{2}$ см. Найдите угол развертки конуса.

	2

3*. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно из центра основания под углом β, а из вершины — под углом α. Определите боковую поверхность конуса, если площадь сечения равна S. Вычислите при $S = \dfrac{12}{\pi}$ $см^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$.

	3

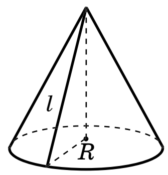
4*. Осевым сечением конуса является правильный треугольник. Образующая конуса — $4\sqrt{3}$ см. Найдите высоту конуса.

	4

5*. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45°, а высота конуса равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите боковую поверхность конуса. В ответ запишите $\dfrac{S}{\pi\sqrt{2}}$.

	5

Ответы:



Площадь боковой поверхности

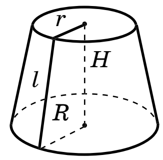
$S_{\text{бок.}} = \pi Rl.$

Площадь полной поверхности (площадь развертки)

$S = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} =$
$= \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$

Объем

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$



Площадь боковой поверхности

$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r).$

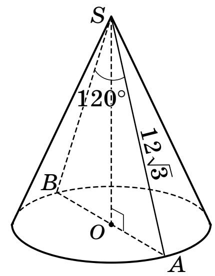
Площадь полной поверхности

$S = S_1 + S_2 + S_{\text{бок.}} =$
$= \pi R^2 + \pi r^2 + \pi l(R + r) =$
$= \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2),$
где S_1, S_2 — площади оснований.

Объем

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2)$$

1. Треугольник ASB — осевое сечение данного конуса (проходит через ось конуса — SO).



По условию $\angle ASB = 120°$,
$AS = BS = 12\sqrt{3}$ см — образующие конуса. Найдем радиус основания конуса — OA.
SO — высота, биссектриса, медиана треугольника ASB, поэтому

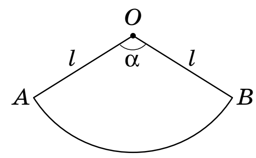
$$\angle SOA = 90°, \quad \angle OSA = \frac{1}{2}\angle ASB = 60°.$$

Из $\triangle AOS$, где $\angle AOS = 90°$:

$$OA = AS \cdot \sin\angle OSA = 12\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 12 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 6 \cdot 3 = 18 \text{ (см)}.$$

Ответ: 18.

2. $S_{\text{б.п.к.}} = \pi Rl$, где $l = OB$ — образующая конуса, R — радиус основания конуса.
Найдем l:



$$\pi Rl = 196\pi; \quad l = \frac{196\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}R} = \frac{196}{7\sqrt{2}} = \frac{28}{\sqrt{2}} \text{ см.}$$

Развертка конуса — сектор (см. рис.).
Дуга AB — длина окружности основания конуса, дуга $AB = 2\pi R$; с другой стороны: дуга $AB = \dfrac{2\pi \cdot OB \cdot \angle AOB}{360°}$ (как дуга сектора AOB).

Пусть $\angle AOB = \alpha$ — искомый угол развертки конуса.

Таким образом, $\dfrac{\cancel{2\pi} \cdot \dfrac{28}{\sqrt{2}} \cdot \alpha}{360°} = \cancel{2\pi} \cdot 7\sqrt{2};$

$$\alpha = \frac{7\sqrt{2} \cdot 360°}{\dfrac{28}{\sqrt{2}}} = \frac{\cancel{7}\sqrt{2} \cdot 360° \cdot \sqrt{2}}{{}^{4}\cancel{28}} = \frac{\cancel{2} \cdot 360°}{{}^{2}\cancel{4}} = 180°.$$

Ответ: 180.

3. *Ответ*: 16.

4. *Ответ*: 6.

5. *Ответ*: 72.

День 80

5.4.3. Шар и сфера, их сечения

1*. Шар, диаметр которого 30 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения. В ответ запишите результат, поделенный на π.

1

2*. Сфера касается всех сторон ромба, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба, если радиус сферы равен 10 см.

2

3*. Будем считать радиус земного шара равным 6200 км. Найдите длину параллели, если ее широта $60°$ $(\pi \approx 3{,}14)$.

3

4*. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом $45°$ к нему. Найдите площадь сечения, если радиус шара равен $25\sqrt{2}$ м, в ответ запишите $S_{\text{сеч.}} : \pi$.

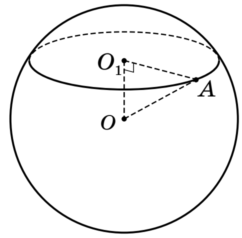
4

5*. На сфере даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними равны 12 см, 16 см, 20 см. Радиус сферы — $\sqrt{125}$ см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки.

5

Ответы:

1. На рисунке $OO_1 = 9$ дм — перпендикуляр к плоскости сечения шара — кругу с центром в точке O_1 и радиусом O_1A. OA — радиус данного шара,



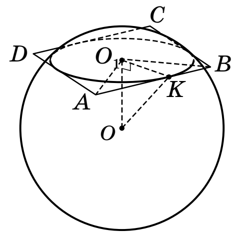
$OA = \dfrac{30}{2} = 15$ дм. Из $\triangle OO_1A$, где $\angle OO_1A = 90°$:

$$O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ (дм)}.$$

$$S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot O_1A^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi \text{ см}^2; \quad \frac{S_{\text{сеч.}}}{\pi} = \frac{144\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 144 \text{ дм}^2.$$

Ответ: 144.

2. Плоскость ромба $ABCD$ пересекает сферу по окружности, центр которой — точка O_1, радиус — отрезок O_1K. Эта окружность касается сторон ромба, поэтому $O_1K \perp AB$.
Точка O — центр данной сферы, OK — радиус сферы, по условию $OK = 10$ см.



$\angle AO_1B = 90°$, $AO_1 = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см),
$BO_1 = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2} \cdot 16 = 8$ (см) (по свойству диагоналей ромба).

В $\triangle AO_1B$:

1) $AB^2 = AO_1^2 + BO_1^2$;

$$AB = \sqrt{AO_1^2 + BO_1^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)};$$

2) O_1K — высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, поэтому

$$AO_1^2 = AK \cdot AB; \quad AK = \frac{AO_1^2}{AB} = \frac{6^2}{10} = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ (см)}.$$

Из $\triangle AKO_1$, где $\angle AKO_1 = 90°$:

$$O_1K = \sqrt{AO_1^2 - AK^2} = \sqrt{6^2 - 3,6^2} = \sqrt{36 - 12,96} = \sqrt{23,04} \text{ (см)}.$$

OO_1 — расстояние от центра сферы до плоскости ромба.
Из $\triangle OO_1K$, где $\angle OO_1K = 90°$:

$$OO_1 = \sqrt{OK^2 - O_1K^2} = \sqrt{10^2 - \left(\sqrt{23,04}\right)^2} = \sqrt{100 - 23,04} =$$

$$= \sqrt{79,96} \approx 8,77 \text{ (см)}.$$

Ответ: 8,77.

3. *Ответ*: 19468.

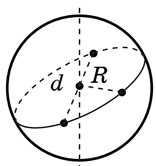
4. *Ответ*: 625.

5. *Ответ*: 5.

Радиус окружности, вписанной в многоугольник

$$r = \frac{S}{p},$$

где S — площадь многоугольника, p — полупериметр многоугольника.



Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2,$$

где R — радиус сферы, d —диаметр сферы.

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

где R — радиус шара, d — диаметр шара.

День 81

5.5. Измерение геометрических величин

5.5.1. Величина угла. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

1*. Найдите длину дуги окружности, радиус которой равен 4 см, отвечающей центральному углу $270°$ $(\pi \approx 3{,}14)$.

1

2*. Какова градусная мера центрального угла, если соответствующая ему дуга составляет $\frac{1}{12}$ окружности?

2

3*. Длина хорды равна $\frac{12}{\pi}$ м. Найдите длину ее дуги, если градусная мера этой дуги равна $60°$.

3

4*. Концы хорды делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как $2:7$. Найдите вписанные углы, опирающиеся на эту хорду.

4

5*. Найдите длину дуги окружности радиуса 18 см, отвечающей центральному углу $30°$.

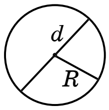
5

6*. Точки K, M, N делят окружность на три дуги, так что $\cup KM : \cup MN : \cup KN = 4:5:9$. Найдите углы треугольника KMN.

6

Ответы:

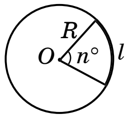
Длина окружности



$C = 2\pi R = \pi d$,

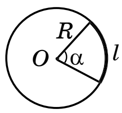
где C — длина окружности, R — радиус окружности, d — диаметр окружности.

Длина дуги окружности



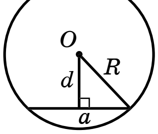
Длина дуги, соответствующая центральному углу в $n°$:

$$l = \frac{2\pi R}{360°} \cdot n° = \frac{\pi R n°}{180°}$$



Длина дуги, соответствующая центральному углу в α радиан:

$$l = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R\alpha .$$



Расстояние от центра окружности до хорды определяется соотношением

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = R^2,$$

где a — длина хорды, R — радиус окружности, d — расстояние от точки до хорды.

1. Длина дуги окружности радиуса R, отвечающая углу n, вычисляется по формуле $l = \frac{\pi R}{180} \cdot n$.

Подставим данные задачи в эту формулу, получим:

$$l = \frac{\pi \cdot 4}{180°} \cdot 270° = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 3}{2} = 6\pi = 6 \cdot 3{,}14 = 18{,}84 \text{ см.}$$

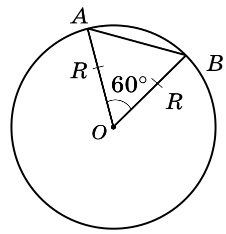
Ответ: 18,84.

2. R — радиус окружности, тогда $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot n$, с другой стороны: $l = \frac{1}{12} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{6}$. Тогда $\frac{\cancel{\pi R}}{6} = \frac{\cancel{\pi R}}{180°} \cdot n$,

$$n = \frac{1}{6} : \frac{1}{180°} = \frac{1 \cdot 180°}{6 \cdot 1} = 30°.$$

Ответ: 30.

3. На рисунке AB — данная хорда, $AB = \frac{12}{\pi}$ см; $\angle AOB = 60°$; т. O — центр окружности. $\cup AB = \frac{\pi R}{180°} \cdot \angle AOB$,



$\cup AB = \frac{\pi R}{180°} \cdot 60° = \frac{\pi R}{3}$. В $\triangle AOB$: $AO = BO = R$ — радиус окружности, тогда

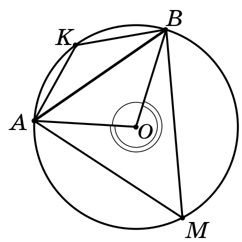
$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{180° - \angle AOB}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = 60° .$$

Значит, $\triangle AOB$ — равносторонний, отсюда

$$R = AB = \frac{12}{\pi} \text{ см. Поэтому } \cup AB = \frac{\cancel{\pi} \cdot \frac{12}{\cancel{\pi}}}{3} = 4 \text{ см.}$$

Ответ: 4.

4. На рисунке AB — данная хорда, которая делит окружность с центром в т. O на две дуги: $\cup AKB$ и $\cup AMB$. Пусть $x°$ — величина одной части, учитывая, что $\cup AKB : \cup AMB = 2 : 7$, получим:



$$\cup AKB = 2x°; \quad \cup AMB = 7x°.$$

$\cup AKB + \cup AMB = 360°$, поэтому

$2x + 7x = 360$, $9x = 360$, $x = 360 : 9$, $x = 40$.

Значит, $\cup AKB = 2 \cdot 40° = 80°$; $\cup AMB = 7 \cdot 40° = 280°$. Вписанный угол в 2 раза меньше соответствующего ему центрального угла (дуги): $\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cup AKB = \frac{1}{2} \cdot 80° = 40°$. $\angle AKB = \frac{1}{2} \cup AMB = \frac{1}{2} \cdot 280° = 140°$.

Ответ: 40; 140.

5. *Ответ*: 9,42.

6. *Ответ*: 40, 50, 90.

День 82

5.5.2. Угол между прямыми в пространстве. Угол между прямой и плоскостью

1*. Ребра пирамиды $SABC$ равны по 3 см. SO — высота пирамиды. Найдите угол между прямой AS и плоскостью ABC.

1

2*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $AD = 5$, $AA_1 = 7$. Найдите угол между прямыми AD и A_1C.

2

3*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B .

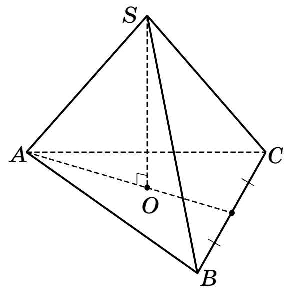
3

4*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой B_1D и плоскостью (ABC).

3

Ответы:

1. Так как по условию все ребра пирамиды равны между собой, то точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому радиус этой окружности



$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ см}.$$

$SO \perp (ABC)$, тогда AO — проекция AS на плоскость (ABC), значит, $\angle SAO$ — угол между AS и плоскостью (ABC) (по определению угла между прямой и плоскостью). Из $\triangle AOS$, где $\angle AOS = 90^\circ$:

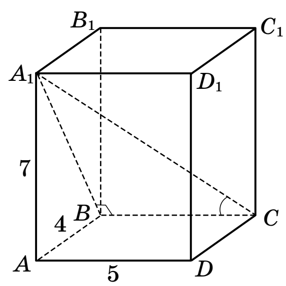
$$\cos\angle SAO = \frac{AO}{AS} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \angle SAO = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Критерии проверки решения:

2. *Решение*:

Прямые AD и A_1C — скрещивающиеся. $BC \parallel AD$.
Угол между прямыми AD и A_1C — это угол между прямыми BC и A_1C.
$BC \perp AB$ (т. к. $ABCD$ — прямоугольник);
$BC \perp BB_1$ (т. к. AA_1B_1B — прямоугольник);



$\Rightarrow BC \perp$ плоскости $(ABB_1) \Rightarrow BC \perp A_1B$. $BC = AD = 5$;

$A_1C^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2$ (по свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда). Следовательно,

$$A_1C = \sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 16 + 25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

1 балл
Правильно обозначен искомый угол. Выполнены верные вычисления для его нахождения.

Из $\triangle A_1BC$, где $\angle A_1BC = 90^\circ$:

$$\cos\angle A_1CB = \frac{BC}{A_1C} = \frac{5}{3\sqrt{10}} = \frac{5\cdot\sqrt{10}}{3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{10}}{3\cdot \cancel{10}_{\,2}} = \frac{\sqrt{10}}{6};$$

$$\angle A_1CB = \arccos\frac{\sqrt{10}}{6}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{10}}{6}$.

2 балла
Верно и обоснованно найден искомый угол.

3. *Ответ*: 1) 60°; 2) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

День 83

5.5.3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника

1*. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 2 м, 3 м, 4 м, 5 м, 15 м? Объясните ответ.

1

2*. В ромбе $ABCD$ меньшая диагональ BD равна 7 см, а его высота — $2\sqrt{6}$ см. Найдите периметр ромба.

2

3*. Две противолежащие стороны выпуклого четырехугольника равны 27,4 см и 15,3 см. Найдите его периметр, если в данный четырехугольник можно вписать окружность.

3

4*. Как изменится длина окружности, если ее диаметр уменьшится на 4 см?

4

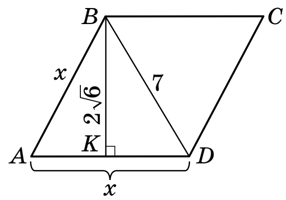
5*. Основания равнобокой трапеции равны 11 см и 15 см, а диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите периметр трапеции.

5

Ответы:

1. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.
Но $2 + 3 + 4 + 5 = 14 < 15$.
Значит, замкнутая ломаная не может иметь данные звенья.
Ответ: нет.

2. Меньшая диагональ ромба лежит против его острого угла.



$BK = 2\sqrt{6}$ см — высота ромба.
Из $\triangle BKD$, где $\angle BKD = 90^\circ$:

$$KD = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

Пусть $AD = x$ см, тогда $AB = x$ см, $AK = (x - 5)$ см.

Из $\triangle AKB$, где $\angle AKB = 90^\circ$: $AB^2 = BK^2 + AK^2$, отсюда

$$x^2 = (x-5)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2; \quad \cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 10x + 25 + 24;$$

$$10x = 49; \quad x = 49 : 10; \quad x = 4,9.$$

Значит, $AD = 4,9$.

$$P_{ABCD} = 4AD = 4 \cdot 4,9 = 19,6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 19,6.

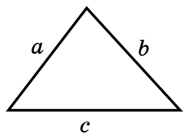
3. Если в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противолежащих сторон равны. Поэтому искомый периметр равен:

$$2(27,4 + 15,3) = 2 \cdot 42,7 = 85,4 \text{ (см)}.$$

Ответ: 85,4.

4. *Ответ*: уменьшится на 4π см.

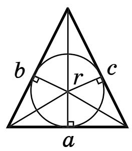
5. *Ответ*: 56.



Площадь треугольника (формула Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Площадь треугольника:

$S = p \cdot r$, где

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме соседних сторон:

$$P = 2(a+b).$$

Периметр квадрата в четыре раза больше его стороны:

$$P = 4a.$$

Площадь описанного четырехугольника равна произведению полупериметра четырехугольника на радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

День 84

5.5.4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости. Расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями

1*. Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых равны 15 см и 20 см, а длины их проекций на плоскость относятся как $9:16$. Найдите расстояние от точки до плоскости.

1

2*. Плоскости α и β параллельны. Длина отрезка A_1B_1 равна 12 см. A_1B_1 лежит в плоскости α. Расстояние от точки A_2, лежащей в плоскости β, до точки B_1 равно 15 см. Найдите расстояние между плоскостями α и β, если $A_1A_2 \perp \alpha$.

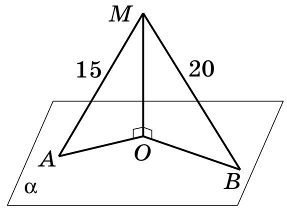
2

3*. Из точки к плоскости проведены две наклонные, проекции которых на эту плоскость равны 5 см и 9 см. Найдите расстояние от точки до плоскости, если сумма длин наклонных равна 28 см.

3

Ответы:

1. Пусть точка M не принадлежит плоскости α; $MA = 15$ см, $MB = 20$ см — наклонные к плоскости α; $MO \perp \alpha$, тогда MO — расстояние от точки M до плоскости α; AO — проекция AM на α, BO — проекция BM на α, $AO : OB = 9 : 16$.



Пусть x см — величина одной части, тогда $AO = 9x$ см, $BO = 16x$ см.

Из $\triangle AOM$, где $\angle AOM = 90°$:

$$MO^2 = AM^2 - AO^2 = 15^2 - (9x)^2 = 225 - 81x^2. \quad (1)$$

Из $\triangle BOM$, где $\angle BOM = 90°$:

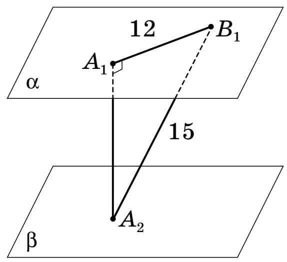
$$MO^2 = BM^2 - BO^2 = 20^2 - (16x)^2 = 400 - 256x^2. \quad (2)$$

Левые части равенств (1) и (2) равны, отсюда: $225 - 81x^2 = 400 - 256x^2$, $175x^2 = 175$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$, $x = -1$ — не удовлетворяет условию задачи.
Значит, $x = 1$ см.
Итак, $MO^2 = 225 - 81x^2 = 225 - 81 = 144$; $MO = 12$ см.

Ответ: 12.

2. Так как прямая A_1B_1 лежит в плоскости α, $A_2A_1 \perp \alpha$, то $A_1A_2 \perp A_1B_1$.
A_1A_2 — искомое расстояние.
Из $\triangle A_2A_1B_1$, где $\angle A_2A_1B_1 = 90°$:

$$A_2A_1 = \sqrt{B_1A_2^2 - A_1B_1^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} =$$
$$= \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9 \text{ (см)}.$$



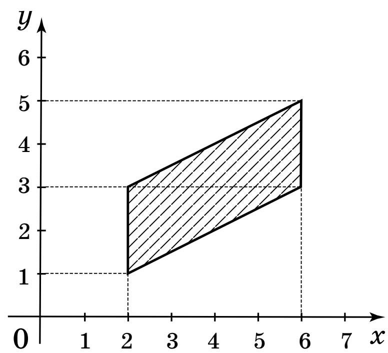
Ответ: 9.

3. *Ответ*: 12.

День 85

5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

1. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке.

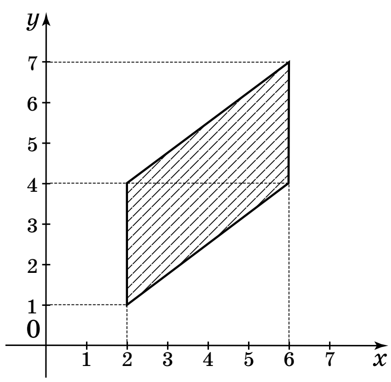


2*. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 26 см, 28 см, 30 см.

3*. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 4 см и 8 см, а угол между ними равен 30°.

4*. В круговой сектор, градусная мера дуги которого равна 60°, вписана окружность радиуса 6 см. Найдите площадь сектора.

5. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке.



6*. Меньшая диагональ прямоугольной трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Острый угол трапеции равен 45°, а большее основание равно 10 м. Найдите площадь трапеции.

Ответы:

1. Данный четырехугольник — параллелограмм со стороной $a = 3 - 1 = 2$ и высотой к этой стороне $h = 6 - 2 = 4$. Поэтому искомая площадь равна $S = a \cdot h = 2 \cdot 4 = 8$.
Ответ: 8.

2. По формуле Герона площадь треугольника со сторонами a, b, c равна:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

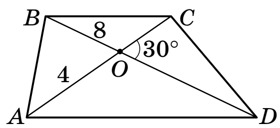
Подставим данные задачи в эту формулу:

$$p = \frac{26+28+30}{2} = \frac{84}{2} = 41 \text{ см}.$$

$$S = \sqrt{41(41-26)(41-28)(41-30)} = \sqrt{41 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11} = \\ = \sqrt{87945} \approx 296{,}56 \text{ см}^2.$$

Ответ: 296,56.

3. Пусть в трапеции $ABCD$ $AC = 4$ см, $BD = 8$ см, т. O — точка пересечения диагоналей AC и BD; $\angle COD = 30°$.

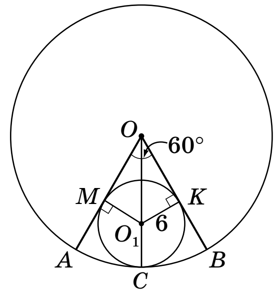


$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin \angle COD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ см}^2.$$

Ответ: 8.

4. Пусть вписанная в сектор окружность касается OB в точке K, OA — в точке M, дуги AB — в точке C. Тогда, учитывая, что O_1 — центр вписанной окружности, $O_1K \perp OB$, $O_1M \perp AO$.



$\angle BOC = \dfrac{1}{2}\angle AOB = \dfrac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ (так как $\angle KOO_1 = \angle MOO_1$ как соответствующие углы равных прямоугольных треугольников KOO_1 и MOO_1)

Из $\triangle O_1KO$, где $\angle O_1KO = 90°$: $O_1O = 2 \cdot O_1K = 2 \cdot 6 = 12$ (см) (так как катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы).
Радиус сектора равен $OB = OC = OO_1 + O_1C = 12 + 6 = 18$ см.
Искомая площадь равна:

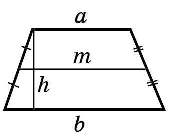
$$S = \frac{\pi \cdot OC^2}{360°} \cdot \angle AOB = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi \cdot 324}{6} = 54\pi \approx 169{,}56 \text{ см}^2.$$

Ответ: 169,56.

5. *Ответ*: 12.

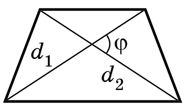
6. *Ответ*: 37,5.

Площадь трапеции



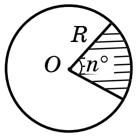
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$$

$$S = mh;$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

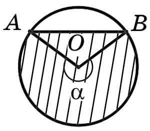
Площадь кругового сектора



Площадь сектора, соответствующего центральному углу в $n°$:

$$S = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°.$$

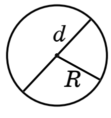
Площадь кругового сегмента



$$S = S_{\text{кр. сег.}} \mp S_{\Delta AOB}$$

(если $\alpha < 180°$ — знак «–», если $\alpha > 180°$ — знак «+»)

Площадь круга

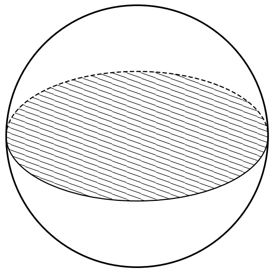


$$S = \pi R^2 = \pi \frac{d^2}{4}.$$

День 86

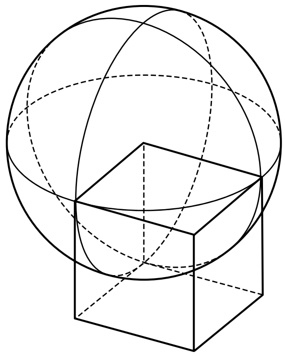
5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы

1. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.



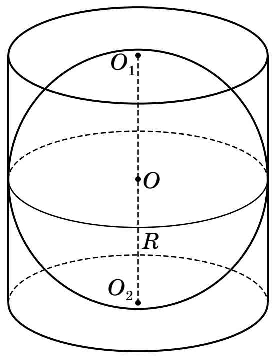
1

2. Вершина куба со стороной 1,6 является центром шара. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.



2

3. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



3

4*. Образующая конуса равна $8\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости его основания под углом 30°.
Найдите поверхность конуса. В ответ запишите результат $\frac{S}{\pi}$.

4

5. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?

5

6*. Образующая конуса равна 10 см. Найдите полную поверхность конуса, если его высота равна 6 см. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

6

Ответы:

1. На рисунке видно, что радиус сферы и радиус большого круга сферы равны R. Тогда $S_{\text{большого круга}} = \pi R^2 = 3$ (по условию).

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

2. На рисунке видно, что радиус шара равен длине ребра куба, т. е. $R = 1,6$.

Искомая площадь поверхности шара S_1 — это $\dfrac{1}{8}$ площади сферы. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{8}S_{\text{сф.}} = \frac{1}{8}\cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{2} = \frac{\pi \cdot \cancel{1,6} \cdot 1,6}{\cancel{2}} = 1,28\pi;$$

$$\frac{S_1}{\pi} = \frac{1,28\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 1,28.$$

Ответ: 1,28.

3. На рисунке видно, что O_1O_2 — диаметр шара, он является высотой цилиндра и $O_1O_2 = 2R$, где R — радиус шара и радиус описанного около него цилиндра. Тогда $H = 2R$ — высота цилиндра.

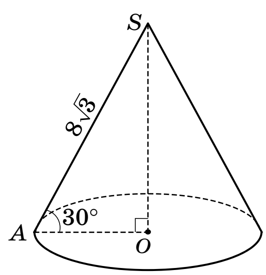
По условию $S_{\text{цил.}} = 18$.

$$S_{\text{цил.}} = S_{\text{б.п.ц.}} + 2S_{\text{осн.}} = 2\pi RH + 2\cdot\pi R^2 = 2\pi\left(R\cdot H + R^2\right) =$$
$$= 2\pi\left(R\cdot H + R^2\right) = 2\pi\left(R\cdot 2R + R^2\right) = 2\pi\cdot 3R^2 = 6\pi R^2;$$

$$6\pi R^2 = 18;\quad \pi R^2 = \frac{18}{6} = 3;\quad S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

4. SO — высота конуса, AS — образующая, AO — радиус основания конуса.



По условию $AS = 8\sqrt{3}$ см, $\angle SAO = 30°$.

Из $\triangle AOS$, где $\angle AOS = 90°$:

$$AO = AS\cdot\cos\angle SAO = 8\sqrt{3}\cdot\cos 30° =$$
$$= 8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\left(\sqrt{3}\right)^2 = 12 \text{ см}.$$

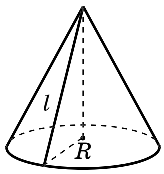
Полная поверхность конуса равна:

$$S = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \pi\cdot AO\cdot AS + \pi\cdot AO^2 = \pi\cdot AO\,(AS + AO) =$$
$$= \pi\cdot 12\,(8 + 12) = \pi\cdot 12\cdot 20 = 240\pi \text{ см}^2.$$
$$S : \pi = 240\pi : \pi = 240.$$

Ответ: 240.

5. *Ответ*: 4.

6. *Ответ*: 144.



Площадь боковой поверхности

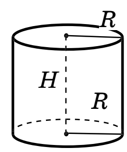
$S_{\text{бок.}} = \pi Rl.$

Площадь полной поверхности (площадь развертки)

$S = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} =$
$= \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$

Объем

$V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$



Площадь поверхности цилиндра

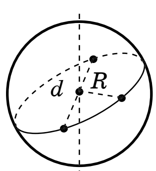
$S = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}},$
$S = 2\pi(R + H)R.$

Площадь боковой поверхности

$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$

Объем

$V = S_{\text{осн.}}\cdot H = \pi R^2 H.$



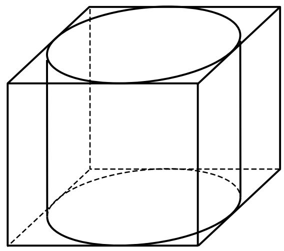
Площадь сферы

$S = 4\pi R^2 = \pi d^2,$
где R — радиус сферы,
d —диаметр сферы

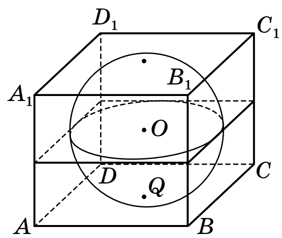
День 87

5.5.7. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

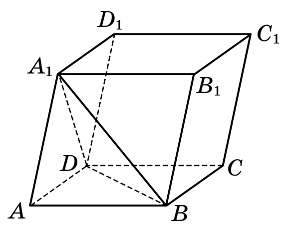
1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



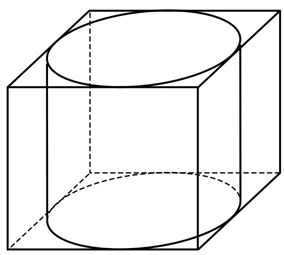
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6,5. Найдите его объем.



3. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABDA_1$.



4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1,5. Найдите объем параллелепипеда.



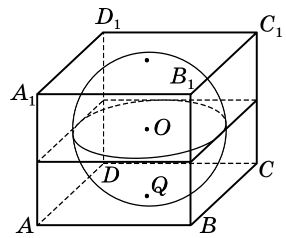
5. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 13 см, а высота — 5 см.

Ответы:

1. В прямоугольник можно вписать окружность, если он — квадрат. Значит, в основании данного прямоугольного параллелепипеда — квадрат со стороной a. Высота цилиндра является высотой описанного около него параллелепипеда, т. е. $H = 1$.
Радиус основания цилиндра равен $R = 1$. Тогда $a = 2R = 2$.
Искомый объем равен: $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = a^2 \cdot H = 2^2 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

2. Основание данного прямоугольного параллелепипеда — квадрат (иначе в него нельзя было бы вписать сферу). Тогда сторона основания параллелепипеда равна $a = 2R$, где R — радиус сферы, $a = 2 \cdot 6{,}5 = 13$.
Высота параллелепипеда равна диаметру вписанной в него сферы:



$$AA_1 = 2R = 2 \cdot 6{,}5 = 13.$$

Итак, искомый объем: $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, где $S_{\text{осн.}} = S_{ABCD}$, $H = AA_1$.
Но легко заметить, что данный прямоугольный параллелепипед — куб с ребром, равным 13.

Тогда $V = AA_1^3 = 13^3 = 2197$.

Ответ: 2197.

3. $V_{\text{пр.}} = S_{ABCD} \cdot H$, где H — высота данной призмы.
По условию высота призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является и высотой пирамиды $ABDA_1$.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{6} S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{пр}}.$$

По условию $V_{\text{пр.}} = 9$, поэтому

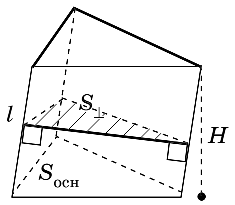
$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

4. *Ответ*: 13,5.

5. *Ответ*: 480.

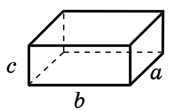
Объем призмы



$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$;

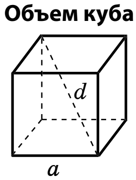
$V = S_{\perp} \cdot l$.

Объем прямоугольного параллелепипеда



$V = abc$.

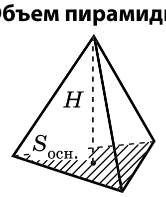
Объем куба



$V = a^3$,

$V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$,

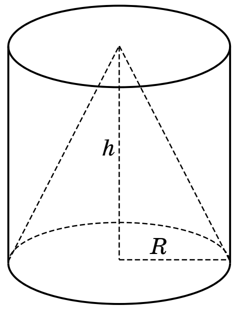
Объем пирамиды



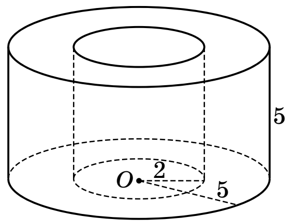
$V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$

День 88

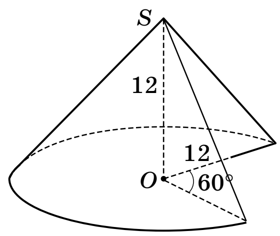
1. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.



2. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

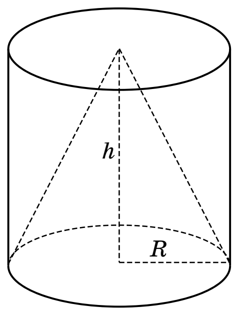


3. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

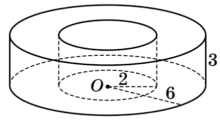


4*. Найдите объем шара, если его сечение плоскостью, удаленной от центра шара на 20 см, имеет площадь 225π см^2. В ответ запишите $\dfrac{3V}{\pi}$.

5. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.



6. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Ответы:

1. $V_{\text{ц.}} = \pi R^2 h$; $V_{\text{кон.}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$. По условию $V_{\text{кон.}} = 25$, тогда $\dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 25$, $\pi R^2 h = 25 \cdot 3$, $\pi R^2 h = 75$, т. е. $V_{\text{ц.}} = 75$.

Ответ: 75.

2. Объем искомой части цилиндра равен разности объемов большего и меньшего цилиндров:

$$V = V_{\text{б}} - V_{\text{м}} = \pi R_{\text{б}}^2 \cdot H - \pi R_{\text{м}}^2 \cdot H = \pi H\left(R_{\text{б}}^2 - R_{\text{м}}^2\right) =$$
$$= \pi \cdot 5\left(5^2 - 2^2\right) = \pi \cdot 5 \cdot 21 = 105\pi.$$
$$\frac{V}{\pi} = \frac{105\pi}{\pi} = 105.$$

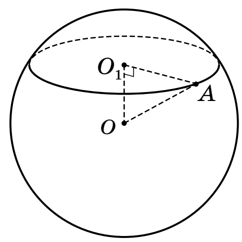
Ответ: 105.

3. Объем искомой части конуса равен разности объемов всего конуса и $\dfrac{1}{6}$ его части ($360° : 60° = 6$). Тогда

$$V = V_{\text{к}} - \frac{1}{6}V_{\text{к}} = \frac{5}{6}V_{\text{к}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot R_{\text{к}}^2 \cdot H_{\text{к}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 =$$
$$= \frac{5 \cdot 12 \cdot 144\pi}{6 \cdot 3} = 480\pi.$$
$$\frac{V}{\pi} = \frac{480\pi}{\pi} = 480.$$

Ответ: 480.

4. Окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1A — сечение шара с центром в точке O и радиусом OA. По условию $OO_1 = 20$ см.



$S_{\text{сеч.}} = 225\pi$ см^2, тогда $\pi \cdot O_1A^2 = 225\pi$;

$O_1A^2 = 225$, $O_1A = \sqrt{225}$; $O_1A = 15$ см.

Из $\triangle OO_1A$, где $\angle OO_1A = 90°$:

$$OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{400 + 225} =$$
$$= \sqrt{625} = 25 \text{ (см)}.$$

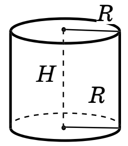
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot OA^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 25^3 = \frac{\pi}{3}\cdot 4 \cdot 15625 = \frac{\pi}{3}\cdot 62\,500 \text{ см}^3.$$
$$V_{\text{шара}} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{\pi}{3}\cdot 62\,500 \cdot \frac{3}{\pi} = 62\,500 \text{ см}^3.$$

Ответ: 62 500.

5. *Ответ*: 54.

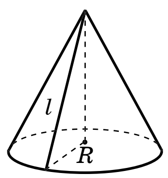
6. *Ответ*: 12.

Объем цилиндра



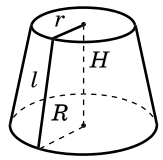
$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi R^2 H$$

Объем конуса



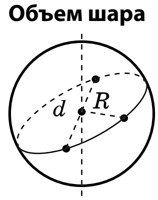
$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Объем усеченного конуса



$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2)$$

Объем шара



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

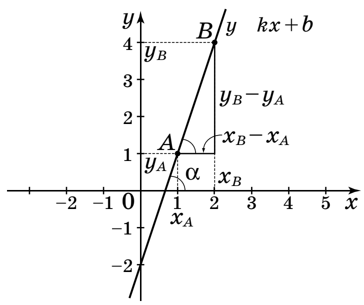
День 89

5.6. Координаты и векторы
5.6.1. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

1*. Найдите радиус окружности, диаметр которой MN и $M(1;7)$; $N(5;4)$.

2*. Концы отрезка $A(5;-2;-4)$ и $B(5;3;6)$. Найдите точку, симметричную середине отрезка относительно плоскости xz. В ответ запишите ординату этой точки.

3*. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(1;1)$ и $B(2;4)$.

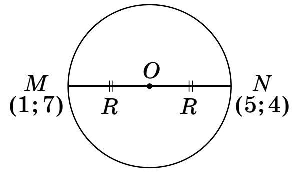


4*. В $\triangle ABC$ $A(2;1;3)$; $B(2;1;5)$; $C(0;1;1)$. Найдите длину медианы AM.

5*. Найдите острый угол, который образует с осью Ox прямая $x+y\sqrt{3}+1=0$.

Ответы:

1. Найдем координаты центра окружности точки O, используя формулу нахождения координат середины отрезка:



$$x_0 = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{1+5}{2} = 3;$$

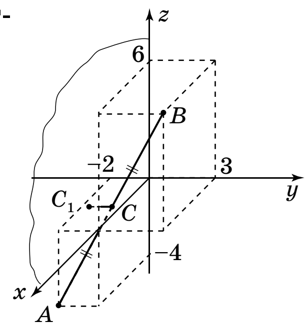
$$y_0 = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{7+4}{2} = 5,5.$$

Найдем радиус данной окружности, например, MO:

$$R = MO = \sqrt{\left(x_M - x_0\right)^2 + \left(y_M - y_0\right)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (7-5,5)^2} =$$
$$= \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

2. Определим координаты середины отрезка AB; координаты точки C:



$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+5}{2} = 5;$$

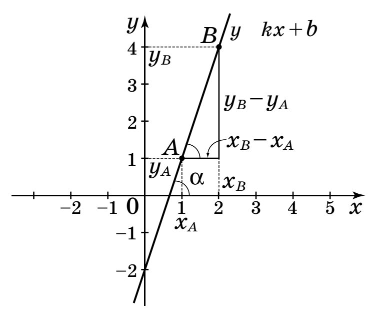
$$y_C = \frac{-2+3}{2} = 0,5;$$

$$z_C = \frac{-4+6}{2} = 1. \quad C\left(5;\ 0,5;\ 1\right).$$

Найдем точку C_1, симметричную C относительно плоскости xz.
По сравнению с точкой C симметричная ей относительно плоскости xz точка C_1 имеет противоположное значение ординаты, т. е. $C_1\left(5;\ -0,5;\ 1\right)$ Ордината точки $-0,5$.

Ответ: $-0,5$.

3. Очевидно, что коэффициент k в уравнении $y = kx + b$ равен тангенсу угла, который образует прямая с осью x.



$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{2-1} = 3.$$

Ответ: 3.

4. *Ответ*: 1.

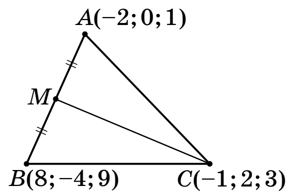
5. *Ответ*: 30.

День 90

5.6.2. Формула расстояния между точками. Уравнение сферы

1*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус сферы, проходящей через вершину A, середины ребер DC и BB_1 и центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

2*. Дан $\triangle ABC$. Найдите длину медианы CM.

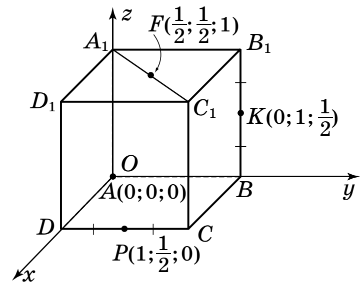


Ответы:

Критерии проверки решения:

1. *Решение*:

Введем систему координат с началом в вершине A, так, что ось Ox идет по стороне AD, ось Oy — по AB и ось Oz — по AA_1. Учитывая, что ребро куба равно 1, получим координаты: т. $A(0;\,0;\,0)$.



Точка P — середина DC и $P\left(1;\,\frac{1}{2};\,0\right)$, точка K — середина BB_1 и $K\left(0;\,1;\,\frac{1}{2}\right)$. Точка F — центр (точка пересечения диагоналей) грани $A_1B_1C_1D_1$; $F\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2};\,1\right)$. Составим уравнение сферы, проходящей через точки A, P, K и F:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

1 балл.
Определены координаты всех четырех точек, составлено уравнение сферы, но сделаны ошибки или решение не закончено.

Поскольку сфера проходит через начало координат, то $d=0$. Подставим координаты точек в это уравнение: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

$$P\left(1;\,\frac{1}{2};\,0\right);\quad K\left(0;\,1;\,\frac{1}{2}\right);\quad F\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2};\,1\right);$$

$$\begin{cases}1+\frac{1}{4}+0+a+\frac{b}{2}=0;\\ 1+\frac{1}{4}+b+\frac{c}{2}=0;\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}a+\frac{b}{2}+\frac{5}{4}=0;\\ b+\frac{c}{2}+\frac{5}{4}=0;\\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c+\frac{3}{2}=0.\end{cases}$$

Решаем систему, получим: $a=-\frac{11}{14}$; $b=-\frac{13}{14}$; $c=-\frac{9}{14}$.

Уравнение сферы имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{11}{14}x-\frac{13}{14}y-\frac{9}{14}z=0.$$

Выделим полные квадраты: $x^2-2\cdot\frac{11}{28}\cdot x+\frac{121}{784}+y^2-$ $-2\cdot\frac{13}{28}y+\frac{169}{784}+z^2-2\cdot\frac{9}{28}\cdot z+\frac{81}{784}=\frac{121}{784}+\frac{169}{784}+\frac{81}{784}$;

$$\left(x-\frac{11}{28}\right)^2+\left(y-\frac{13}{28}\right)^2+\left(z-\frac{9}{28}\right)^2=\frac{371}{784}.$$

Значит, $R^2=\frac{371}{784}$; $R=\sqrt{\frac{371}{784}}=\frac{\sqrt{371}}{28}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{371}}{28}$.

2 балла.
Обоснованно получен верный ответ.

2. *Ответ*: 6.

День 91

5.6.3. Вектор. Модуль вектора. Равенство, сложение, умножение на число

1*. Найдите длину вектора $\overline{a} = -3\overline{AB}$, если $A(3;\,-2;\,0)$ и $B(5;\,0;\,-1)$.

2*. Известно, что $|\overline{a}| = 11$, $|\overline{b}| = 23$, $|\overline{a} - \overline{b}| = 30$. Найдите $|\overline{a} + \overline{b}|$.

3*. Даны точки: $A(8;\,-2;\,5)$, $B(2;\,3;\,7)$, $C(-3;\,9;\,4)$ и $D(3;\,4;\,m)$. При каком значении m равны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$?

4*. Даны векторы $\overline{a}(1;\,1;\,-1)$ и $\overline{b}(2;\,0;\,0)$. Найдите длину вектора $\overline{c} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$. Ответ округлите до десятых.

5*. Дано: $|\overline{a}| = 5$; $|\overline{b}| = 12$, причем $\overline{a} \perp \overline{b}$. Найдите $|\overline{a} + \overline{b}|$.

Ответы:

1. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}\left(5-3;\ 0-(-2);\ -1-0\right);\quad \overline{AB}\left(2;\ 2;\ -1\right).$$

Найдем $\bar{a}=-3\overline{AB}=-3\overline{(2;\ 2;\ -1)}=\overline{(-6;\ -6;\ 3)}$.

Тогда длина вектора $\bar{a}$ $|\bar{a}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{81}=9$.
Ответ: 9.

2. Найдем сумму квадратов модулей: $|\bar{a}-\bar{b}|$ и $|\bar{a}+\bar{b}|$:

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2+|\bar{a}+\bar{b}|^2=\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2+\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2=$$
$$=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2+\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=2|\bar{a}|^2+2|\bar{b}|^2.$$

Значит, $|\bar{a}-\bar{b}|^2+|\bar{a}+\bar{b}|^2=2|\bar{a}|^2+2|\bar{b}|^2$.

Найдем $|\bar{a}+\bar{b}|^2$:

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=2|\bar{a}|^2+2|\bar{b}|^2-|\bar{a}-\bar{b}|^2=$$
$$=2\cdot 11^2+2\cdot 23^2-30^2=242+1058-900=400.$$

Тогда $|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{400}=20$.
Ответ: 20.

3. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=\overline{\left(2-8;\ 3-(-2);\ 7-5\right)}=\overline{(-6;\ 5;\ 2)}.$$

Найдем координаты вектора $\overline{DC}$:

$$\overline{DC}=\overline{\left(-3-3;\ 9-4;\ 4-m\right)}=\overline{\left(-6;\ 5;\ 4-m\right)}.$$

Векторы равны, если равны их координаты, поэтому $4-m=2;\ \ m=2$.
Ответ: 2.

4. *Ответ*: 8,4.

5. *Ответ*: 13.

Условие равенства векторов

$\vec{a}(x_1;\ y_1)=\vec{b}(x_2;\ y_2)$
тогда и только тогда,
когда $\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=y_2.\end{cases}$

$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)=$
$=\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$
тогда и только тогда,
когда $\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=y_2,\\ z_1=z_2.\end{cases}$

Сумма и разность двух векторов

Если $\vec{a}(x_1;\ y_1)$,
$\vec{b}(x_2;\ y_2)$, то
$\vec{a}+\vec{b}=$
$=\vec{c}(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$,
$\vec{a}-\vec{b}=$
$=\vec{d}(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$.

Если $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$,
$\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то
$\vec{a}+\vec{b}=$
$=\vec{c}(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$,
$\vec{a}-\vec{b}=$
$=\vec{d}(x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)$.

Умножение вектора на число

Если $\vec{a}(x_1;\ y_1)$,
то $\lambda\vec{a}=\vec{b}(\lambda x_1;\ \lambda y_1)$.
Если $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$,
то
$\lambda\vec{a}=\vec{b}(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$.

День 92

5.6.4. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным

1*. Даны точки $A(1;\ 0;\ 2)$; $B(3;\ n;\ 5)$; $C(2;\ 2;\ 0)$ и $D(5;\ 4;\ m)$. При каких значениях m и n векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны? В ответ запишите $m \cdot n$.

1

2*. Векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ коллинеарны. Найдите λ $(\lambda > 0)$, если $|\lambda a| = 5$, а координаты вектора $\bar{a} = (\overline{6;\ -8})$.

2

3*. Даны векторы $\bar{a}(-1;\ 1)$; $\bar{b}(1;\ 1)$ и $\bar{c}(1;\ -2)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы выполнялось равенство $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$. В ответ запишите $\lambda + \mu$.

3

4*. Даны векторы $\bar{a}(1;\ 0)$; $\bar{b}(1;\ 1)$ и $\bar{c}(-1;\ 0)$. Найдите такие λ и μ, чтобы $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$. В ответ запишите $\lambda + \mu$.

4

5*. При каких m и n $\bar{a} \parallel \bar{b}$, если $\bar{a}(15;\ m;\ 1)$ и $\bar{b}(18;\ 12;\ n)$. В ответ запишите $m \cdot n$.

5

Ответы:

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} = \left(\overline{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A}\right) = \left(\overline{3-1;\ n-0;\ 5-2}\right) = \left(\overline{2;\ n;\ 3}\right).$$

$$\overline{CD} = \left(\overline{x_D - x_C;\ y_D - y_C;\ z_D - z_C}\right) = \left(\overline{5-2;\ 4-2;\ m-0}\right) = \left(\overline{3;\ 2;\ m}\right).$$

Векторы ненулевые, по условию коллинеарны, значит, их соответствующие координаты должны быть пропорциональны:

$$\frac{2}{3} = \frac{n}{2} = \frac{3}{m}.$$

Решим пропорцию

$$\frac{2}{3} = \frac{n}{2};\quad n = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3};\quad \frac{2}{3} = \frac{3}{m};\quad m = \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9}{2};$$

$$n\cdot m = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

Условие коллинеарности векторов

$\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

$\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Если векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ коллинеарны, то координаты этих векторов: $\bar{a}(6;-8)$ и $\lambda\bar{a}(6\lambda;-8\lambda)$.

Найдем $|\lambda\bar{a}| = \sqrt{(6\lambda)^2 + (-8\lambda)^2}$, а по условию $|\lambda\bar{a}| = 5$. Получим уравнение: $\sqrt{36\lambda^2 + 64\lambda^2} = 5$; $\sqrt{100\lambda^2} = 5$, поскольку $\lambda > 0$, то $10\lambda = 5$, $\lambda = 0,5$.

Ответ: 0,5.

3. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — неколлинеарные векторы (а они неколлинеарны, т. к. $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$), то вектор $\bar{c}$ можно разложить по двум неколлинеарным векторам единственным образом:

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b};\quad \left(\overline{1;-2}\right) = \lambda\left(\overline{-1;1}\right) + \mu\left(\overline{1;1}\right);$$

$$\left(\overline{1;-2}\right) = \left(\overline{-\lambda;\ \lambda}\right) + \left(\overline{\mu;\ \mu}\right)\quad \text{или}\quad \left(\overline{-\lambda+\mu;\ \lambda+\mu}\right) = \left(\overline{1;-2}\right).$$

Из условия равенства векторов получим: $\begin{cases} -\lambda + \mu = 1; \\ \lambda + \mu = -2. \end{cases}$

Поскольку в ответ необходимо записать $\lambda + \mu$, то данная система уравнений дает ответ: $\lambda + \mu = -2$.

Ответ: −2.

4. *Ответ*: −1.

5. *Ответ*: 12.

День 93

5.6.5. Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомланарным

1*. При каком значении n векторы $\bar{a}(1; -1; 2)$; $\bar{b}(0; 2; 3)$ и $\bar{c}(2; 0; n)$ компланарны?

1

2*. Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}(3; -2; 1)$; $\bar{b}(-1; 1; -2)$; $\bar{c}(2; 1; -3)$. Найдите разложение вектора $\bar{d}(11; -6; 5)$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $\bar{d} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}$. В ответ запишите $\lambda + \mu + \nu$.

2

3*. При каком значении m векторы $\bar{a}\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$; $\bar{b}\left(-\frac{3}{2}; 6; \frac{4}{3}\right)$ и $\bar{c}\left(\frac{9}{8}; m; -1\right)$ компланарны?

3

4*. Даны три вектора $\bar{a}(0; 0; 1)$; $\bar{b}(0; 1; 0)$; $\bar{c}(1; 1; 1)$. Найдите разложение вектора $\bar{m} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}$. $\bar{m}(1; 2; 3)$. В ответ запишите $\lambda + \mu + \nu$.

4

Ответы:

Если векторы компланарны, то

$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b},$$

где $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

1. Пусть $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$;

$$\left(\overline{2;\ 0;\ n}\right) = \lambda\left(\overline{1;\ -1;\ 2}\right) + \mu\left(\overline{0;\ 2;\ 3}\right);$$

$$\left(\overline{2;\ 0;\ n}\right) = \left(\overline{\lambda;\ -\lambda;\ 2\lambda}\right) + \left(\overline{0;\ 2\mu;\ 3\mu}\right).$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases}\lambda + 0 = 2;\\ -\lambda + 2\mu = 0.\end{cases}$

Отсюда $\lambda = 2$; $\mu = 1$, тогда $n = 2\lambda + 3\mu = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$

Ответ: 7.

2. Если векторы некомпланарны, то вектор $\overline{d}$ можно представить в виде разложения $\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$ единственным образом:

$$\left(\overline{11;\ -6;\ 5}\right) = \lambda\left(\overline{3;\ -2;\ 1}\right) + \mu\left(\overline{-1;\ 1;\ -2}\right) + \nu\left(\overline{2;\ 1;\ -3}\right);$$

$$\left(\overline{3\lambda;\ -2\lambda;\ \lambda}\right) + \left(\overline{-\mu;\ \mu;\ -2\mu}\right) + \left(\overline{2\nu;\ \nu;\ -3\nu}\right) = \left(\overline{11;\ -6;\ 5}\right).$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}3\lambda - \mu + 2\nu = 11;\\ -2\lambda + \mu + \nu = -6;\\ \lambda - 2\mu - 3\nu = 5.\end{cases}$$

Сложим первое уравнение со вторым: $\lambda + 3\nu = 5$; сложим третье уравнение с первым, умноженным почленно на -2:

$$+\begin{cases}-6\lambda + 2\mu - 4\nu = -22\\ \lambda - 2\mu - 3\nu = 5\end{cases}$$

$$\overline{-5\lambda - 7\nu = -17 \text{ или } 5\lambda + 7\nu = 17.}$$

Получим систему: $\begin{cases}\lambda + 3\nu = 5;\\ 5\lambda + 7\nu = 17.\end{cases}$

Решим ее способом подстановки:

$$\lambda = 5 - 3\nu,\quad 5(5 - 3\nu) + 7\nu = 17;\quad 25 - 15\nu + 7\nu = 17;$$

$$-8\nu = -8;\quad \nu = 1;\quad \lambda = 2.$$

Подставим эти значения во второе уравнение:

$$-2 \cdot 2 + \mu + 1 = -6;\quad \mu = -3.$$

$$\lambda + \mu + \nu = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Ответ: 0.

3. *Ответ*: –4,5.

4. *Ответ*: 4.

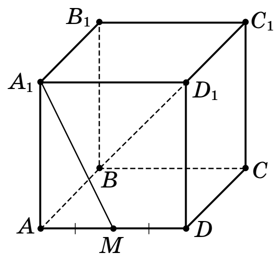
День 94

5.6.6. Координаты вектора. Скалярное произведение. Угол между векторами

1*. Даны точки $A(0; 1; 1)$, $B(1; 1; 2)$; $C(2; -2; 2)$ и $D(2; -3; 1)$. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

1

2*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите угол между BD_1 и MA_1, где M — середина ребра AD.



2

3*. Дан $\triangle ABC$. Найдите внешний угол при вершине B, если $B(2; -1; -1)$; $A(2; 2; -4)$ и $C(3; -1; -2)$.

3

Ответы:

1. Найдем координаты векторов:

$\overline{AB} = \left(\overline{1-0;\ 1-1;\ 2-1}\right);\quad \overline{AB}\left(1;\ 0;\ 1\right).$

$\overline{CD}\left(\overline{2-2;\ -3+2;\ 1-2}\right);\quad \overline{CD}\left(0;\ -1;\ -1\right).$

$$\cos\left(\widehat{\overline{AB};\ \overline{CD}}\right) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|} = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}};$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{AB};\ \overline{CD}}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\left(\widehat{\overline{AB};\ \overline{CD}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180^\circ - \arccos\frac{1}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Ответ: 120.

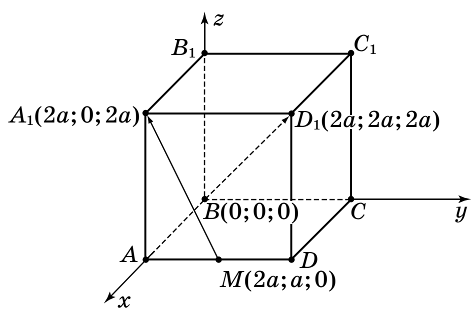
Критерии проверки решения:
1 балл. Определен угол между скрещивающимися прямыми, но в решении сделаны ошибки или задача решена не полностью.
2 балла. Обоснованно получен правильный ответ.

2. *Решение*:

Введем декартову систему координат с началом в точке B.

Ось Ox пойдет по ребру AB, *ось* Oy — по ребру BC и ось Oz — по BB_1.

Пусть ребро куба равно $2a$.



Рассмотрим векторы $\overline{MA_1}$ и $\overline{BD_1}$ в этой системе координат, найдем угол между этими векторами.

Координаты точек, задающих эти векторы, будут иметь вид: $B(0;\ 0;\ 0)$; $D_1(2a;\ 2a;\ 2a)$; $M(2a;\ a;\ 0)$ и $A_1(2a;\ 0;\ 2a)$. Координаты векторов:

$$\overline{BD_1}(2a;\ 2a;\ 2a);\quad \overline{MA_1}(0;\ -a;\ 2a).$$

Модули векторов: $\left|\overline{BD_1}\right| = \sqrt{(2a)^2+(2a)^2+(2a)^2}$

$= \sqrt{12a^2} = 2a\sqrt{3}.\ \left|\overline{MA_1}\right| = \sqrt{0^2+(-a)^2+(2a)^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}.$

Скалярное произведение векторов:

$$\overline{BD_1}\cdot\overline{MA_1} = 2a\cdot 0 + 2a\cdot(-a) + 2a\cdot 2a = 2a^2.$$

Тогда $\cos\left(\widehat{\overline{BD_1};\ \overline{MA_1}}\right) = \dfrac{\overline{BD_1}\cdot\overline{MA_1}}{\left|\overline{BD_1}\right|\cdot\left|\overline{MA_1}\right|} = \dfrac{2a^2}{2a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}};$

$$\left(\widehat{\overline{BD_1};\ \overline{MA_1}}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

3. *Ответ*: 120.

День 95

6.1. Элементы комбинаторики

6.1.1. Поочередный и одновременный выбор

1*. В киоске продаются ручки 6 видов и тетради 5 видов. Сколькими способами можно составить пару из ручки и тетради?

1

2*. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются.

2

3*. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега дистанции 100 м, если все показали разное время?

3

4*. Имеется 4 разных конверта без марок и 3 разные марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправления письма?

4

5*. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 6 разных цветов?

5

6*. Из 15 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

6

Ответы:

1. Очевидно, что к каждой из 6 ручек можно взять любую из 5 тетрадей. Поэтому по правилу произведения пару «ручка-тетрадь» можно составить $6 \cdot 5 = 30$ способами.
Ответ: 30.

2. Для выбора формулы выясним, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования цифр важен. Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 6 элементов по 3.

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

(Использовали формулу

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

где A_n^k — размещение из n элементов по k.)

Ответ: 120.

3. Участницу, занявшую первое место, можно выбрать по формуле $A_8 = 8$, т. е. 8 способами.
Участницу, занявшую второе место, можно выбрать уже $A_7^1 = 7$, т. е. семью способами, а участницу, занявшую третье место, — $A_6^1 = 6$, шестью способами. По правилу произведения занять первое, второе и третье места можно $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ способами.

Ответ: 336.

4. *Ответ*: 12.

5. *Ответ*: 120.

6. *Ответ*: 210.

День 96

6.1.2. Формулы сочетаний и перестановок. Бином Ньютона

1*. Найдите количество разных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 5, 7 и 9, если цифры в числе не повторяются.

1

2*. Из 10 туристов надо выбрать 2 дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

2

3*. Найдите разложение степени бинома $(3x+2y)^4$. В ответ запишите коэффициент при x^2y^2.

3

4*. Катя помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 7, 3 и 5, но не помнит, в каком порядке они расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей надо перебрать, чтобы дозвониться подруге.

4

5*. Ученику дали список из 10 книг, которые надо прочитать во время каникул. Сколькими способами он может выбрать 7 книг?

5

6*. Найдите коэффициент при x^2 в разложении бинома $(x+2)^5$.

6

Ответы:

Перестановки из n элементов (различаются порядком следования элементов)

$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$,

где P_n — количество перестановок.

$0! = 1$ («$n!$» читают: n факториал)

Размещения из n элементов по m (различаются или порядком, или элементами)

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где A_n^m — количество размещений из n элементов по m

Комбинации из n элементов по m (различаются лишь элементами)

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m},$$

где C_n^m — количество комбинаций из n элементов по m. $C_n^0 = 1$

1. Из четырех цифр 0, 5, 7 и 9 можно получить P_4 перестановок. Перестановки, начинающиеся с цифры 0, не являются записью четырехзначного числа — их количество P_3.
Тогда количество четырехзначных чисел равно

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18.$$

Ответ: 18.

2. Поскольку порядок следования элементов не учитывается (дежурным не важно, в каком порядке их выберут), то соответствующее соединение является сочетанием из 10 элементов по 2.
Для вычисления используем формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad C_{10}^3 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Ответ: 45.

3. Используем формулу для разложения

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Тогда

$$(3x+2y)^4 =$$
$$= (3x)^4 + 4(3x)^3 \cdot 2y + 6(3x)^2 \cdot (2y)^2 + 4(3x)(2y)^3 + (2y)^4 =$$
$$= 81x^4 + 108x^3 \cdot 2y + 54x^2 \cdot 4y + 12x \cdot 8y^3 + 16y^4 =$$
$$= 81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4.$$

При x^2y^2 коэффициент равен 216.
Ответ: 216.

4. *Ответ*: $P_3 = 6$.

5. *Ответ*: $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$.

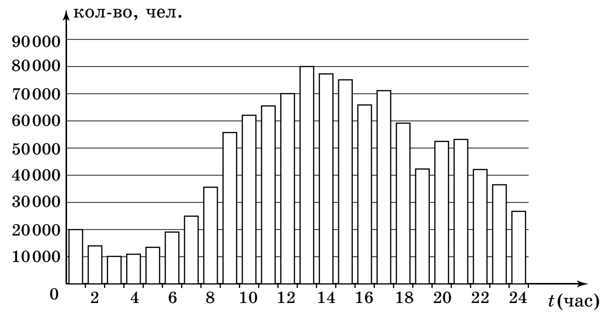
6. *Ответ*: 80.

День 97

6.2. Элементы статистики

6.2.1. Табличное и графическое представление данных

1. На диаграмме показано количество посетителей сайта «РИА Новости» в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме разность наибольшего и наименьшего количества посетителей за час.



2*. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки на расстояние 450 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость аренды. Клиент обязан оплатить топливо для автомобиля. (Цена дизельного топлива — 18 руб. за литр, бензина — 19 руб. за литр, газа — 9 руб. за литр.)

Автомобиль	Топливо	Расход топлива на 100 км (литров)	Арендная плата за сутки
1	Дизельное (18 руб./л)	14	3400 руб.
2	Бензин (19 руб./л)	16	3000 руб.
3	Газ (9 руб./л)	18	3200 руб.

Клиент выбирает самый дешевый вариант. Какую сумму он заплатит?

3. На диаграмме (см. задачу 1) показано количество посетителей сайта «РИА Новости» в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, за какой час на сайте «РИА Новости» побывало минимальное количество посетителей.

4*. Строительной фирме надо приобрести 60 кубометров бруса у одного из поставщиков. Цены и условия поставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
1	3500	10800	
2	4000	8800	При заказе на сумму более 150 тыс. руб. доставка бесплатная
3	3800	8800	При заказе на сумму более 200 тыс. руб. доставка бесплатная

Какую сумму заплатит строительная фирма, если она выбирает наиболее дешевый вариант?

Ответы:

1. Очевидно, что наибольшее количество посетителей было в 13 часов — 80 000, а наименьшее в 3 часа, т. е. 10 000 человек.
Разность: 80 000 – 10 000 = 70 000
Ответ: 70 000.

2. Вычислим расходы клиента по каждому виду автомобиля.
1-й автомобиль:
$$\frac{450 \text{ км}}{100 \text{ км}} \cdot 14 \text{ л} \cdot 18 \text{ руб./л} + 3400 \text{ руб.} = 4534 \text{ руб.}$$
2-й автомобиль:
$$\frac{450 \text{ км}}{100 \text{ км}} \cdot 16 \text{ л} \cdot 19 \text{ руб./л} + 3000 \text{ руб.} = 4368 \text{ руб.}$$
3-й автомобиль:
$$\frac{450 \text{ км}}{100 \text{ км}} \cdot 18 \text{ л} \cdot 9 \text{ руб./л} + 3200 \text{ руб.} = 3929 \text{ руб.}$$
Ответ: 3929.

3. *Ответ*: 3.

4. *Ответ*: 220 800.

День 98

6.2.2. Числовые характеристики рядов данных

1*. Девочки 11 класса на уроке физкультуры при прыжках в высоту показали следующие результаты: 90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140, 140.
Найдите моду этой совокупности данных.

1

2*. Найдите медиану совокупности выборки, представленной в задаче 1.

2

3*. Найдите среднее значение ряда данных, представленных в задаче 1.

3

4*. Найдите размах заданной совокупности данных, представленных в задаче 1.

4

5*. После летних каникул провели опрос 9 мальчиков о количестве книг, прочитанных ими за каникулы. Получили ряд чисел:

5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Найдите моду этой совокупности данных.

5

6*. Найдите медиану совокупности выборки, представленной в задаче 5.

6

Ответы:

Мода — это значение случайной величины, встречающееся чаще остальных.

Медиана — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины. Если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине; если четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

1. Поэтому для этого ряда мода равна 140.
Ответ: 140.

2. Данная совокупность имеет четное количество чисел, поэтому медианой должно быть среднее арифметическое чисел 135 и 135; очевидно, что это и будет число 135.
Ответ: 135.

3. Средним значением будет среднее арифметическое заданной совокупности данных:

$$\frac{90+125\cdot 2+130\cdot 2+135\cdot 3+140\cdot 4}{12}\approx 130,4.$$

Ответ: 130,4.

4. Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями, т. е. $140 - 90 = 50$.
Ответ: 50.

5. *Ответ*: 4.

6. *Ответ*: 4.

День 99

6.3. Элементы теории вероятностей

6.3.1. Вероятности событий

1*. В лотерее 30 выигрышных билетов и 270 билетов без выигрыша. Какова вероятность, что первый приобретенный билет будет выигрышным?

1

2*. В коробке лежат разноцветные шары: 40 красных, 20 белых, остальные — черные. Сколько черных шаров в коробке, если вероятность выбора случайным образом черного шара $P(\text{ч}) = \frac{1}{3}$?

2

3*. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания в мишень одного — 0,7, другого — 0,9. Найдите вероятность того, что хотя бы один стрелок попал в цель.

3

4*. Из натуральных чисел от 1 до 20 ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 20?

4

5*. В мастерской три станка. За рабочую смену из строя выходит не более одного. Первый выходит из строя с вероятностью 0,15, второй — с вероятностью 0,05, а третий с вероятностью 0,1. Найдите вероятность того, что за смену ни один станок не выйдет из строя.

5

Ответы:

1. Общее количество билетов — 300. Поскольку из них только 30 выигрышные, то вероятность того, что первый приобретенный билет будет выигрышным:

$$P(A) = \frac{30}{300} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

2. Пусть в коробке лежит x черных шаров, тогда общее количество шаров: $40 + 20 + x = 60 + x$.

Вероятность вытащить черный шар — $\frac{1}{3}$, тогда

$$P(\text{ч}) = \frac{x}{60 + x} = \frac{1}{3};\ \ 3x = 60 + x;\ \ x = 30.$$

Ответ: 30.

3. Пусть событие A_1 состоит в том, что первый стрелок попал в цель, т. е. $P\left(A_1\right) = 0,7$, а событие $\overline{A_1}$ — в том, что он не попал в цель, т. е. $P\left(\overline{A_1}\right) = 0,3$. Аналогично

$$P\left(A_2\right) = 0,9 \ \text{ и } \ P\left(\overline{A_2}\right) = 0,1.$$

Тогда вероятность того, что оба стрелка не попали в цель:

$$P(A) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03,$$

а вероятность того, что хотя бы один попал в цель:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Ответ: 0,97.

4. *Ответ*: 0,3.

5. *Ответ*: 0,7.

Теоремы сложения вероятностей

События A и B — совместимы

нет: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

да: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Теоремы умножения вероятностей

События A и B — зависимы

нет: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

да: $P(AB) = P(A) \cdot P(BA)$

День 100

6.3.2. Примеры использования вероятности и статистики для прикладных задач

1*. Среди однотипных деталей, выпускаемых в цеху, 1% бракованных. Среди качественных деталей — 40% деталей высшего сорта. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь будет высшего сорта?

1

2*. Молокозавод выпускает молоко разной жирности. В продуктовых магазинах города произвели опрос 50 покупателей о том, какой жирности молоко они потребляют. Результаты опроса представили в таблице:

Жирность молока в %	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Завод должен выпускать 2000 л молока ежедневно. Сколько молока жирностью 2,5% ему необходимо выпускать?

2

3*. Используя таблицу к задаче 2, выясните, сколько молока жирностью 5% необходимо выпускать молокозаводу.

3

4*. Прибор выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один из трех его элементов, которые ломаются с вероятностями 0,1; 0,2 и 0,3 независимо друг от друга на протяжении некоторого времени. Найдите вероятность того, что на протяжении этого времени прибор будет работать.

4

Ответы:

1. Пусть событие A состоит в том, что деталь небракованная, а событие B — в том, что деталь высшего сорта. Тогда событие A/B — выбрали качественную деталь высшего сорта.

Выбор одной детали — равновозможные события. Поскольку 1 % деталей бракованных, то 99 % — качественных и $P(A) = 0,99$. Среди качественных деталей 40 % высшего сорта, $P_A(B) = 0,4$. Тогда искомая вероятность $P(A/B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,99 \cdot 0,4 = 0,396$.

Ответ: 0,396.

2. Будем считать выборку объемом $n = 50$ репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности объемом 2000 л количество молока каждой жирности пропорционально количеству покупателей, которые потребляют молоко этой жирности. Итак, частота покупки молока жирности 2,5 % равна 12, тогда относительная частота $\frac{12}{50} = \frac{6}{25}$. Значит, молока этой жирности необходимо произвести

$$2000 \cdot \frac{6}{25} = 480 \text{ л.}$$

Ответ: 480.

3. *Ответ*: 240.

4. *Ответ*: 0,504.

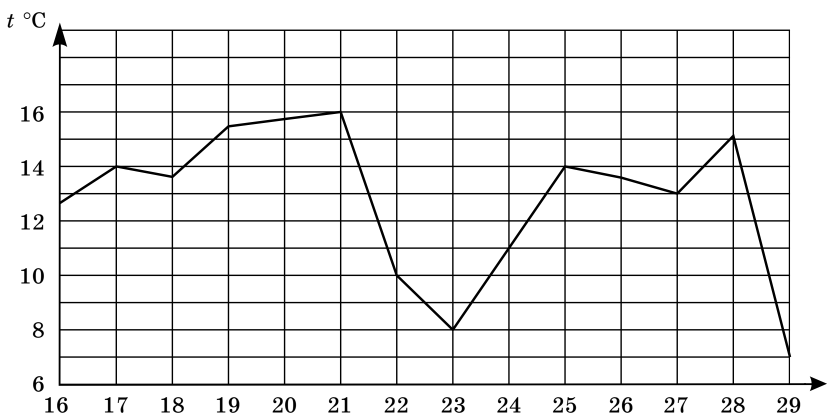
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ № 2[1]

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1—В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1. Для приготовления маринованных огурцов на 1 л воды требуется 12 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит две трехлитровые банки маринада. В магазине продаются пачки лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пачек достаточно купить хозяйке для приготовления маринада?

B2. На рисунке показано изменение средней дневной температуры в Барнауле в период с 16 по 29 сентября 1959 г.

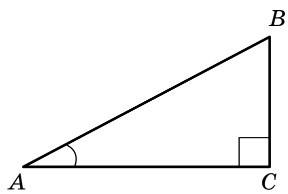


г. Барнаул, сентябрь, 1959

Определите по графику разность между наибольшей и наименьшей средней дневной температурой за указанный период.

B3. Найдите корень уравнения $6^{6-2x} = 216$.

B4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 15$, $\sin\angle A = \frac{5}{13}$. Найдите длину стороны AC.



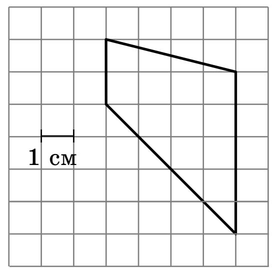
---

[1] Тренировочный тест № 2 является демонстрационным вариантом КИМ ЕГЭ 2011 г. (*www.fipi.ru*).

B5. Для строительства коттеджа нужно приобрести 35 м^3 бруса у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость бруса (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	4350	2000	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатная
Б	4300	6000	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатная
В	4250	4900	

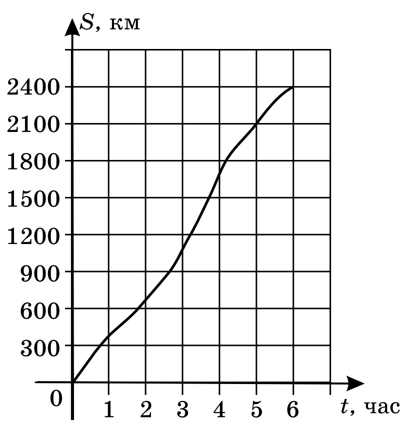
B6. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7. Вычислите значение выражения

$$\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

B8. На рисунке изображен график движения самолета по маршруту. По горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — пройденное расстояние. Пользуясь графиком, найдите среднюю скорость самолета на всем маршруте. Ответ дайте в километрах в час.



B9. Закрытый сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами 30, 40 и 45 см стоит на горизонтальной поверхности таким образом, что наименьшая грань является дном. В сосуд налили воду до уровня 36 см. На каком уровне окажется вода, если сосуд поставить на наибольшую грань? Ответ дайте в сантиметрах.

B10. Автомобильная электрическая цепь защищена предохранителем, который плавится, если сила проходящего через него тока превышает 30 А. Номинальное напряжение в цепи $U = 12$ В. Сила тока определяется по формуле $I = \frac{W}{U}$, где W — суммарная мощность всех включенных электроприборов (в ваттах). Определите наибольшую суммарную мощность, при которой сила тока в этой цепи не превышает допустимое значение. Ответ дайте в ваттах.

B10

B11. Найдите корень уравнения $\log_3(x+5) + \log_3(x-3) = 2$.

B11

B12. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 33 км, выехал трактор, а через 1 час 36 минут вслед за ним выехал автомобиль, скорость которого на 40 км/ч больше, чем скорость трактора. В пункт B трактор и автомобиль прибыли одновременно. Определите скорость трактора. Ответ дайте в км/ч.

B12

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geqslant 2\log_2 x$.

C4. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - \left|x^2 - 5x + 4\right| - a.$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

C6. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , - À Â Ä Ô Ö È É Ê Ë Î Ï Ù Û Ü ß

Регион | Код предмета | Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение вариантов в задании и бланке ответов подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка.

Резерв 5

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Номера заданий типа **А** с выбором ответа из предложенных вариантов

Образец написания метки ☒

ЗАПРЕЩЕНЫ исправления в области ответов

Будьте аккуратны. Случайный штрих внутри квадрата может быть воспринят как метка

Номера вариантов ответа: 1, 2, 3, 4

A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10 A11 A12 A13 A14 A15 A16 A17 A18 A19 A20 A21 A22 A23 A24 A25 A26 A27 A28 A29 A30

A31 A32 A33 A34 A35 A36 A37 A38 A39 A40 A41 A42 A43 A44 A45 A46 A47 A48 A49 A50 A51 A52 A53 A54 A55 A56 A57 A58 A59 A60

Замена ошибочных ответов на задания типа **А**

1 | 2 | 3 | 4

А
А
А
А

Резерв - 6

Резерв - 7

Результаты выполнения заданий типа **В** с ответом в краткой форме

B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10

B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 B19 B20

Замена ошибочных ответов на задания типа **В**

В -
В -
В -

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №2

Регион | Код предмета | Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №2

Регион | Код предмета | Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Единый государственный экзамен - 2011

Бланк ответов №2

Регион | Код предмета | Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2 | Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Ответы к тренировочному тесту № 2

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
B1	8	B7	3,5
B2	9	B8	400
B3	1,5	B9	24
B4	36	B10	360
B5	150500	B11	4
B6	14	B12	15

№ задания	Ответ
C1	$\left((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$
C2	$\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$
C3	$0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \leqslant \sqrt[4]{32}$
C4	0,1
C5	$a \leqslant -2$; $a \geqslant 0$
C6	$m = 2$, $n = 1$

8 B1

B1. Всего нужно маринада: $2 \cdot 3$ л $= 6$ л. Для 6 л маринада потребуется: $6 \cdot 12 = 72$ г лимонной кислоты. Для этого нужно: $72 : 10 = 7{,}2$ пачки. Наименьшее целое число пачек — 8.

9 B2

B2. Как видно из графика, наибольшая температура — 16 °С, наименьшая — 7 °С. Разность между ними: $16 - 7 = 9$ °С.

1,5 B3

B3. $6^{6-2x} = 216$, $6^{6-2x} = 6^3$, $6 - 2x = 3$, $2x = 6 - 3$,

$$x = \frac{6-3}{2} = 1{,}5$$

36 B4

B4. $\sin\angle A = \dfrac{BC}{AB}$, поэтому $AB = \dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{15}{\frac{5}{13}} = 3 \cdot 13 = 39$.

По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Тогда

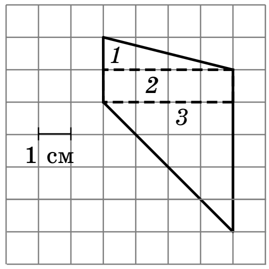
$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{(39-15)(39+15)} =$$

$$= \sqrt{24 \cdot 54} = \sqrt{4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6} = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36.$$

150500 B5

B5. Вычислим стоимость каждой покупки с доставкой.
А: $35 \cdot 4350 = 152\,250$, $152\,250 > 150\,000$ — доставка бесплатная.
Б: $35 \cdot 4300 = 150\,500$, $152\,250 > 150\,000$ — доставка бесплатная.
В: $35 \cdot 4250 = 148\,750$, доставка — 4900, всего в сумме: $148\,750 + 4900 = 153\,650$.

B6. Площадь одной клетки 1 см^2. Разделим нашу фигуру на 3. Вспомним, что диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника. Тогда площадь треугольника 1: $S_1 = 4 : 2 = 2$ см^2, площадь треугольника 3: $S_3 = 16 : 2 = 8$ см^2. Площадь прямоугольника 2: $S_2 = 4$ см^2. Суммируем площади всех фигур: $S = 2 + 8 + 4 = 14$ см^2.



14	B6

B7. $\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Подставляем в наше выражение:

$$\sqrt{3}\left(2\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{3}{2} = 3,5 .$$

3,5	B7

B8. Средняя скорость $v = \dfrac{S}{t}$. По графику определяем, что $S = 2400$ км, а время $t = 6$ ч. $v = \dfrac{2400}{6} = 400$ км/ч.

400	B8

B9. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$. Наименьшая грань с ребрами 30 и 40 см. Объем жидкости, которую налили: $V = 30 \cdot 40 \cdot 36 = 43200$. Наибольшая грань с ребрами 45 и 40 см. Так как объем жидкости не менялся, то из равенства объемов определим высоту жидкости: $43200 = 40 \cdot 45 \cdot x$, $x = \dfrac{43200}{40 \cdot 45} = 24$.

24	B9

B10. $W = I \cdot U$, $W = 30 \cdot 12 = 360$ Вт.

360	B10

B11. $\log_3(x+5) + \log_3(x-3) = 2$. Область определения:

$$\begin{cases} x+5>0, \\ x-3>0, \end{cases} \begin{cases} x>-5, \\ x>3, \end{cases} \quad x>3.$$

$\log_3\left[(x+5)(x-3)\right] = \log_3 2^3$, $(x+5)(x-3) = 2^3$,

$x^2 + 5x - 3x - 15 = 9$, $x^2 + 2x - 24 = 0$.

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100$,

$x_1 = \dfrac{-2+10}{2} = 4$, $x_2 = \dfrac{-2-10}{2} = -6$.

4	B11

B12. Пусть скорость трактора x км/ч, тогда скорость автомобиля — 40 км/ч.

15	B12

Составим таблицу для решения задачи:

	v (км/ч)	t (час)	S (км)
Трактор	x	$\frac{33}{x}$	33
Автомобиль	$x+40$	$\frac{33}{x+40}$	33

По условию задачи трактор выехал на 1 ч 36 мин, т. е. $1\frac{36}{60}=1\frac{6}{10}=1,6$ часа раньше, т. е он потратил времени больше, чем автомобиль, на 1,6 часа.

Получим уравнение: $\frac{33}{x}-\frac{33}{x+40}=1,6$.

Решим это уравнение. Область определения решений этого уравнения: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -40. \end{cases}$ (В знаменателе дроби не может стоять ноль.) Умножим правую и левую части уравнения на $x(x+40)$. Получим:

$$33(x+40)-33x=1,6x(x+40).$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$33x+33\cdot 40-33x-1,6x^2-1,6\cdot 40x=0,$$

$$1,6x^2+1,6\cdot 40x-33\cdot 40=0.$$

Решим это квадратное уравнение:

$D=(1,6\cdot 40)^2-4\cdot 1,6\cdot(-33\cdot 40)=1,6\cdot 40\cdot(1,6\cdot 40+4\cdot 33)=$
$=16\cdot 4\cdot 4\cdot(1,6\cdot 10+33)=16\cdot 16\cdot(16+33)=16\cdot 16\cdot 49$

$$x_{1,2}=\frac{-1,6\cdot 40\pm\sqrt{16\cdot 16\cdot 49}}{2\cdot 1,6}=\frac{-1,6\cdot 40\pm 16\cdot 7}{2\cdot 1,6}=$$

$$=\frac{-1,6(40\pm 70)}{2\cdot 1,6}=-\frac{(40\pm 70)}{2}=-(20\pm 35).\ x_1=15,\ x_2=-55.$$

Так как скорость не может быть отрицательной, то второе решение не удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки решения:
1 балл. Верно определены корни уравнений, но или не произведен отбор найденных решений, или допущены ошибки в отборе.

С1. *Решение*:

Если $\cos y=0$, то $y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x=(-1)^k$.

Если $\cos y>0$, то из первого уравнения находим: $x=3$ или $x=-\frac{1}{2}$.

При $x=3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x=-\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y>0$, получаем: $y=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\left((-1)^k; \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in Z$.

2 балла.
Обоснованно получен верный ответ

C2. *Решение*:

Критерии проверки решения:

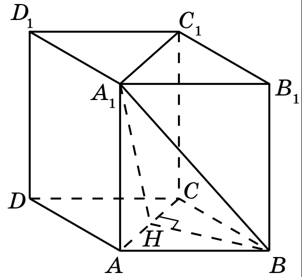
Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H — проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.

В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим:

$$\sin \angle A_1 = \frac{BH}{A_1B} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$



1 балл.
Способ нахождения искомого угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено

Ответ: $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

2 балла.
Обоснованно получен верный ответ

C3. *Решение*:

Критерии проверки решения:

Сделаем замену: $y = \log_2 x$. Получаем:

$$\frac{y-5}{1-2y} \geqslant 2y; \quad \frac{4y^2-y-5}{2y-1} \leqslant 0; \quad \frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1} \leqslant 0.$$

Тогда $y \leqslant -1$ или $\dfrac{1}{2} < y \leqslant \dfrac{5}{4}$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x \leqslant -1, \\ 0,5 < \log_2 x \leqslant 1,25; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leqslant \sqrt[4]{32}. \end{array}\right.$$

1 балл.
Сделана верно замена переменной, но получен неверный ответ или решение не закончено

Ответ: $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \leqslant \sqrt[4]{32}$.

2 балла.
Обоснованно получен правильный ответ

C4. *Решение*:

Критерии проверки решения:

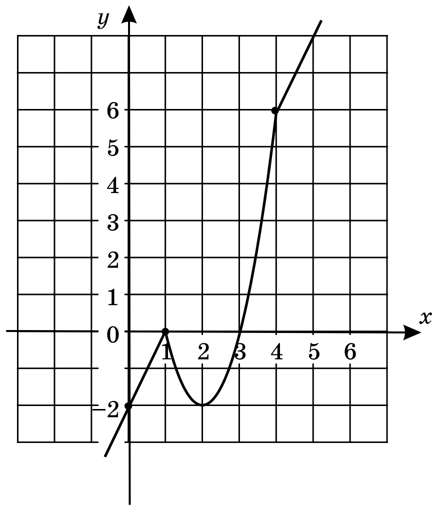
Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит,

$$S_{AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}S_{ABD} = \frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{10}S_{ABC}.$$

1 балл.
Получен правильный ответ. Решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности

Ответ: 0,1.

2 балла.
Обоснованно получен правильный ответ

Критерии проверки решения:	**C5.** *Решение*:
1 балл. Получен правильный ответ. Решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности	Рассмотрим вспомогательную функцию $$g\left(x\right)=x^2-3x+2-\left|x^2-5x+4\right|.$$ График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех различных корней. Если $x\leqslant 1$ или $x\geqslant 4$, то $\left|x^2-5x+4\right|=x^2-5x+4$ и $g(x)=2x-2$. Если $1<x<4$, то $\left|x^2-5x+4\right|=-x^2+5x-4$ и $g(x)=2x^2-8x+6$.  График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех корней, только если $a\leqslant g(2)$ или $a\geqslant g(1)$. $g(2)=-2$; $g(1)=0$.
2 балла. Обоснованно получен верный ответ	*Ответ*: $a\leqslant -2$; $a\geqslant 0$.

Критерии проверки решения:	**C6.** *Решение*:
1 балл. Получен правильный ответ. Решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности	При любом k число $3^{2k}+1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1}+1$ — остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n+1=2^m$, только если $m=1$ или $m=2$ (если $m\geqslant 3$, то 2^m делится на 8 без остатка). Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n=1$, решением которого является не натуральное число 0. Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n=3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.
2 балла. Обоснованно получен верный ответ	*Ответ*: $m=2$, $n=1$.

СОДЕРЖАНИЕ

Издание для дополнительного образования

Для старшего школьного возраста

Виноградова Татьяна Михайловна
Лысикова Ирина Викторовна
Роганин Александр Николаевич
и др.

ЕГЭ

Математика

Экспресс-подготовка

Директор редакции *Л. Бершидский*
Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 07.02.2011. Формат 84x108 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага тип. Усл. печ. л. 25,2.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-44782-4

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА

МАТЕМАТИКА

Выпускникам школ, абитуриентам и педагогам для повышения качества подготовки к ЕГЭ издательство «Эксмо» предлагает учебно-методические комплекты по подготовке к единому государственному экзамену по всем предметам: русскому языку, литературе, математике, истории, обществознанию, биологии, географии, химии, физике, информатике и по иностранным языкам.

В каждый предметный комплект входят:

- Тематические тренировочные задания
- Сдаем без проблем!
- Репетитор
- Тренировочные задания
- Сборник заданий
- Универсальный справочник
- Пошаговая подготовка

Содержание настоящего издания:

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

- Тестовые задания в форме ЕГЭ
- Ответы и комментарии к заданиям
- Краткая справочная информация

100 дней до ЕГЭ

ISBN 978-5-699-44782-4
9 785699 447824 >

эксмо