государственная итоговая аттестация

ГИА

АЛГЕБРА

Сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе

Издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

государственная
итоговая аттестация

АЛГЕБРА

Сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе

5-е издание

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2010

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
А45

Серия «Государственная итоговая аттестация»
основана в 2005 году

Авторы: Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова,
Е. А. Бунимович, Т. В. Колесникова, Л. О. Рослова

В работе над приложением 2
принимал участие В. А. Булычев

Алгебра : сб. заданий для подгот. к гос. итоговой
А45 аттестации в 9 кл. /[Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]. — 5-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 239 с. : ил. — (Государственная итоговая аттестация). — ISBN 978-5-09-022180-1.

Сборник предназначен для подготовки к государственной итоговой аттестации по алгебре в новой форме. Его авторы — разработчики и составители ежегодных экзаменационных материалов. В сборнике содержатся тренировочные варианты первой части экзаменационной работы, набор заданий второй части, демонстрационные варианты работ с решениями и комментариями, методические рекомендации по подготовке к экзамену. Новое издание дополнено примерами контрольных заданий по вероятностно-статистической линии курса основной школы.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-022180-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для подготовки к государственной итоговой аттестации по алгебре в 9 классе в новой форме (ГИА 9). Это переработанное и дополненное издание, в котором учтен опыт проведения экзамена, начавшегося в 2004 г. с эксперимента в девяти субъектах РФ и получившего к настоящему времени достаточно широкое распространение.

Основное назначение новой системы итоговой аттестации — введение открытой, объективной, независимой процедуры оценивания учебных достижений учащихся. Экзаменационные работы, используемые в ГИА, рассчитаны на выпускников девятых классов общеобразовательных учреждений (школ, гимназий, лицеев), включая классы с углубленным изучением математики. Результаты экзамена могут учитываться при формировании профильных десятых классов.

Структура и содержание экзаменационной работы отвечают цели построения системы дифференцированного обучения в современной школе, которая включает две задачи. Одна из них — это формирование у всех учащихся базовой математической подготовки, составляющей функциональную основу общего образования. Другая — создание для части школьников условий, способствующих получению повышенного уровня подготовки, достаточной для активного использования математики в дальнейшем обучении, прежде всего при изучении ее в старших классах на профильном уровне. В соответствии с этим экзаменационная работа состоит из двух частей. Первая часть направлена на проверку базовой подготовки выпускников, вторая — на дифференцированную проверку владения материалом на повышенных уровнях. Содержание и той и другой части находится в рамках содержания основного общего образования по математике, предусмотренного стандартом[1].

Первая часть работы содержит 16 заданий, среди которых задания с выбором ответа, с кратким ответом и задания на соотнесение. Задания располагаются группами в соответствии с разделами содержания, к которым они относятся. По сравнению с традиционной практикой в работе усилены понятийный и практический аспекты. Про-

[1] См. Федеральный компонент Государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование (Приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента Государственных образовательных стандартов общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

верке подвергается не только усвоение основных алгоритмов и правил, но и понимание смысла важнейших понятий и их свойств, содержания применяемых приемов, а также умение применять знания в простейших практических ситуациях. При выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний, умение пользоваться разными математическими языками, распознавать стандартные задачи в разнообразных формулировках.

Вторая часть содержит пять заданий, предусматривающих развернутый ответ с записью хода решения. Все пять задач представляют разные разделы содержания. Задания расположены по нарастанию сложности — от относительно простой задачи до задач достаточно сложных, требующих свободного владения материалом и высокого уровня математического развития. Последние две задачи наиболее сложные, они рассчитаны на учащихся, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса. Задания второй части экзаменационной работы носят комплексный характер. Их выполнение требует уверенного владения формально-оперативным алгебраическим аппаратом, способности к интеграции знаний из различных тем курса, владения широким набором приемов и способов рассуждений. Кроме того, учащиеся должны продемонстрировать умение математически грамотно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения.

Структура пособия продиктована структурой и особенностями экзамена. Сборник состоит из трех основных разделов и двух приложений.

Раздел I содержит образцы первой части работы (двенадцать наборов по два параллельных варианта). Во всех вариантах представлены следующие блоки содержания: числа (три задания), буквенные выражения (два задания), преобразования выражений (три задания), уравнения и текстовые задачи (три задания), неравенства (два задания), функции и графики (два задания), последовательности и прогрессии (одно задание). Во всех вариантах в одном и том же соотношении содержатся задания на проверку умения применять известные алгоритмы, решать несложные задачи, не сводящиеся к прямому применению алгоритма, применять знания в простейших практических ситуациях, задания на проверку знания опорных фактов, понимания смысла фундаментальных понятий. В своей совокупности предложенные варианты позволяют получить достаточно полное представление о характере и уровне сложности первой части экзаменационной работы, потренироваться в ее выполнении. В конце раздела даны ответы ко всем заданиям.

Раздел II содержит задания для подготовки к выполнению второй части экзамена. Подобные задания используются в реальных экзаменационных работах. Задания этого раздела распределены по восьми содержательным блокам: 1) выражения и их преобразования; 2) уравнения; 3) системы уравнений; 4) неравенства; 5) функции; 6) координаты и графики; 7) арифметическая и геометрическая прогрессии; 8) текстовые задачи. В каждом блоке задания представлены на трех уровнях в соответствии с тем, как они включаются в экзаменационную работу. Их относительная сложность условно обозначена числом баллов: 2 балла (первое задание во второй части работы), 4 балла (два следующих задания в работе) и, наконец, 6 баллов (два последних, наиболее сложных задания). Пять задач, включаемых в экзаменационную работу, выбираются по одной, из разных блоков. В конце раздела ко всем заданиям даны ответы и указания.

Раздел III включает две полные тренировочные экзаменационные работы с инструкцией для учащихся и планами, конкретизирующими результаты обучения, подвергаемые проверке. Эти работы сопровождаются ответами, комментариями по выполнению отдельных заданий, образцами решения заданий с развернутым ответом.

Приложение 1 содержит методические рекомендации по подготовке к экзамену по алгебре, проводимому в новой форме, с примерами возможных подходов к решению заданий первой и второй частей.

Приложение 2 содержит примеры задач по вероятностно-статистической линии курса основной школы, которые характеризуют требования к усвоению соответствующего материала по окончании 9 класса. Задачи разбиты на две группы — для части 1 и для части 2. В части 2 около каждого номера в скобках проставлена цифра (2, 4 или 6), обозначающая его условную сложность. Все задания сопровождаются решениями и ответами. В настоящее время проверка усвоения этих вопросов в ходе государственной итоговой аттестации осуществляется в режиме эксперимента. В ближайшие годы вероятностно-статистический материал будет включаться в общую экзаменационную работу.

В заключение авторы считают необходимым выразить благодарность людям, в той или иной форме способствовавшим созданию новой системы итоговой аттестации по алгебре в 9 классе. Она была разработана в ходе эксперимента, проводившегося в девяти субъектах РФ: Московская область, Республика Саха (Якутия), Республика Татарстан, Краснодарский край, Челябинская область, Псковская область, Новгородская область, Кемеровская область, Калининградская область. Авторы выражают глубокую благодарность всем, кто участвовал в этом эксперименте, и прежде всего региональным координаторам, обеспечивавшим организационную сторону эксперимента: Т. В. Абрамовой, Г. И. Алексеевой, Н. Е. Байрачному, Г. З. Габдрахмановой, М. В. Гончар, Г. Е. Гришину, С. В. Еремину, В. П. Михайловой, А. В. Осиповой, Е. Л. Рудневой.

Переработанное издание сборника учитывает накопившийся массовый опыт проведения экзамена, имеющиеся обширные результаты выполнения работ учащимися, результаты широкой экспертизы материалов, анкетирования учителей и методистов по всем вопросам, связанным с новой формой аттестации по алгебре. Авторы искренне благодарны всем коллегам, принимавшим и принимающим активное участие во внедрении новой системы аттестации, а также в обсуждении всех содержательных аспектов экзамена, в экспертизе разрабатываемых материалов: В. К. Акименко, Л. И. Байер, Н. Н. Будищевой, Н. Гайнутдиновой, Г. Ф. Гатауллиной, З. С. Гребневой, З. П. Громадской, Л. А. Душениной, А. К. Дьячкову, М. С. Дыраховой, Л. А. Жигулеву, Л. Х. Закировой, Т. И. Закревской, А. А. Земзюлиной, И. А. Зудиловой, С. В. Климонтовой, Е. А. Комаровой, Т. Г. Корниловой, Н. Н. Кукебаевой, В. Д. Куличкиной, Е. И. Лешуковой, О. Г. Лотоголец, Е. Ю. Лукичевой, Т. В. Матюшкиной, С. А. Михролиевой, Е. В. Морозовой, Л. А. Муравьевой, Н. Б. Мухаметовой, И. М. Никитиной, Г. П. Николаевой, Т. Д. Осиповой, М. Г. Петровой, Т. В. Петровой, Н. А. Пигеевой, Н. Г. Поповой, Л. М. Протасевич, В. А. Роткиной, Н. Т. Рыловой, Е. А. Семенко, О. Д. Сидоровой, Г. Г. Тепляковой, Н. Н. Федорову, И. М. Шигабутдинову, В. И. Эверстову, Е. В. Эргле.

Авторы чрезвычайно признательны И. А. Емелиной, Н. В. Сафоновой, Л. Т. Прималенной за полезные замечания по содержанию сборника.

РАЗДЕЛ I

Первая часть экзаменационной работы. Тренировочные варианты

Работа № 1

Вариант 1

1 Найдите значение выражения $\sqrt{2x+1}$ при $x=-\frac{4}{9}$.

А. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ В. $\frac{1}{3}$

Б. 1 Г. При $x=-\frac{4}{9}$ выражение не имеет смысла

2 Из формулы мощности $N=\frac{A}{t}$ выразите работу A.

А. $A=\frac{Nt}{A}$ Б. $A=\frac{N}{t}$ В. $A=\frac{t}{N}$ Г. $A = Nt$

3 Сравните a^2 и a^3, если известно, что $0 < a < 1$.

А. $a^2 < a^3$ В. $a^2 = a^3$

Б. $a^2 > a^3$ Г. Для сравнения не хватает данных

4 Для биологической лаборатории купили оптический микроскоп, который дает возможность различать объекты размером до $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

А. 0,0000025 мм В. 0,00025 мм

Б. 0,000025 мм Г. 0,0025 мм

5 В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй — в 2 раза. В какой библиотеке книг стало больше?

А. В первой библиотеке

Б. Во второй библиотеке

В. Книг осталось поровну

Г. Для ответа не хватает данных

6 Упростите выражение $(a - 4)^2 - 2a(3a - 4)$.

А. $-5a^2 + 16$ В. $-5a^2 + 8$

Б. $-5a^2 + 8a - 16$ Г. $-5a^2 + 8a - 4$

7 Какое из данных выражений не равно $\sqrt{\frac{5}{48}}$?

А. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{3}}$ Б. $\frac{\sqrt{15}}{12}$ В. $\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$ Г. $\frac{\sqrt{5}}{8}$

8 Сократите дробь $\frac{a^2+3a}{9-a^2}$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $3x^2 + x = 0$.

Ответ: ____________________

10 Вычислите координаты точки пересечения прямых

$$2x + 3y = -12 \text{ и } 4x - 6y = 0.$$

Ответ: ____________________

11 Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно — со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 ч?

Пусть x ч — время, затраченное на дорогу от озера до деревни. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $15x = 10(1 - x)$

Б. $\frac{15}{x}+\frac{10}{1-x}=1$

В. $15x + 10(1 - x) = 1$

Г. $15(1 - x) = 10x$

12 При каких значениях x значения выражения $8x - 2$ больше значений выражения $10x + 1$?

А. При $x > -1{,}5$ В. При $x < 0{,}5$

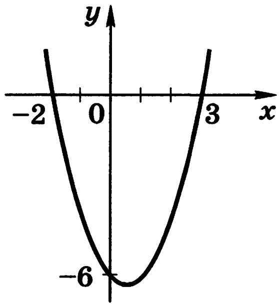
Б. При $x < -1{,}5$ Г. При $x > 0{,}5$

13 На рисунке изображен график функции

$$y = x^2 - x - 6.$$

Используя график, решите неравенство

$$x^2 - x - 6 > 0.$$



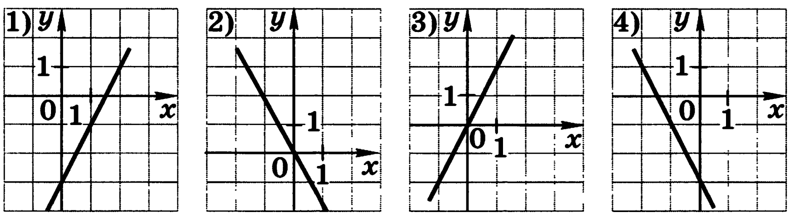
Ответ: ____________________

14 В геометрической прогрессии $b_1 = 64$, $q = -\frac{1}{2}$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

А. $b_2 < b_3$ В. $b_4 > b_6$

Б. $b_3 > b_4$ Г. $b_5 > b_7$

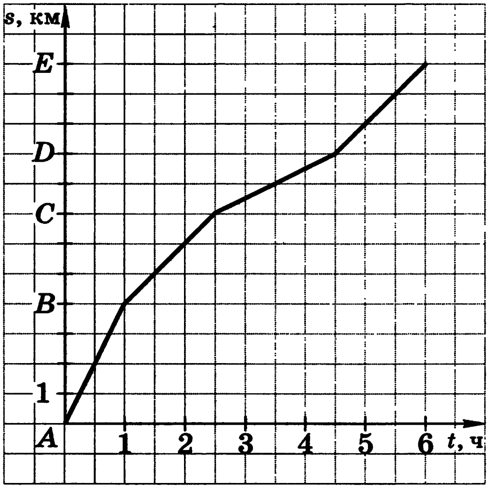
15 Установите соответствие между графиками функций и формулами, задающими эти функции.



а) $y = 2x$ б) $y = -2x - 3$ в) $y = -2x$ г) $y = 2x - 3$

Ответ:	1	2	3	4

16 Плот плывет по реке. На рисунке изображен график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения t, по вертикальной — расстояние s, которое проплыл плот. На каком участке пути скорость течения наибольшая?



А. От A до B

Б. От B до C

В. От C до D

Г. От D до E

Работа № 1

Вариант 2

1 Найдите значение выражения $\sqrt{1+3x}$ при $x = -0{,}17$.

А. 0,07

Б. 0,7

В. 1,24

Г. При $x = -0{,}17$ выражение не имеет смысла

2 Из формулы удельной теплоемкости $c = \frac{C}{M}$ выразите массу M.

А. $M = Cc$ Б. $M = \frac{c}{C}$ В. $M = \frac{C}{c}$ Г. $M = \frac{cM}{C}$

3 Сравните a и a^2, если известно, что $0 < a < 1$.

А. $a > a^2$ В. $a = a^2$

Б. $a < a^2$ Г. Для сравнения не хватает данных

4 Простейшие-паразиты имеют длину от 1 см до $2 \cdot 10^{-4}$ см. Выразите последнюю величину в миллиметрах.

А. 0,02 мм В. 0,0002 мм

Б. 0,002 мм Г. 0,00002 мм

5 В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй — в 1,5 раза. В какой библиотеке книг стало больше?

А. В первой библиотеке

Б. Во второй библиотеке

В. Книг осталось поровну

Г. Для ответа не хватает данных

6 Упростите выражение $(c + 5)^2 - c(10 - 3c)$.

А. $-2c^2 + 25$ В. $4c^2 - 5c + 25$

Б. $4c^2 - 10c + 25$ Г. $4c^2 + 25$

7 Какое из данных выражений не равно $\sqrt{\frac{4}{45}}$?

А. $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}}$ Б. $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ В. $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ Г. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

8 Сократите дробь $\frac{3a^2-6a}{a^2-4}$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $3x - x^2 = 0$.

Ответ: ____________________

10 Вычислите координаты точки пересечения прямых

$$4x - 10y = 0 \text{ и } 3x + 5y = 25.$$

Ответ: ____________________

11 Лыжник от озера до деревни шел со скоростью 15 км/ч, а обратно — со скоростью 12 км/ч. Сколько времени ушло у него на обратную дорогу, если на весь путь туда и обратно лыжник затратил 3 ч?

Пусть x ч — время на обратную дорогу. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $15(3 - x) = 12x$

Б. $\frac{15}{x}+\frac{12}{3-x}=3$

В. $15x + 12(3 - x) = 3$

Г. $15x = 12(3 - x)$

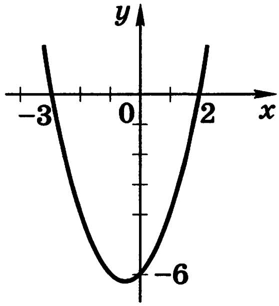
12 При каких значениях x значения выражения $3x - 4$ меньше значений выражения $7x - 2$?

А. При $x > 1,5$ В. При $x < -0,5$

Б. При $x < 1,5$ Г. При $x > -0,5$

13 На рисунке изображен график функции

$$y = x^2 + x - 6.$$



Используя график, решите неравенство

$$x^2 + x - 6 < 0.$$

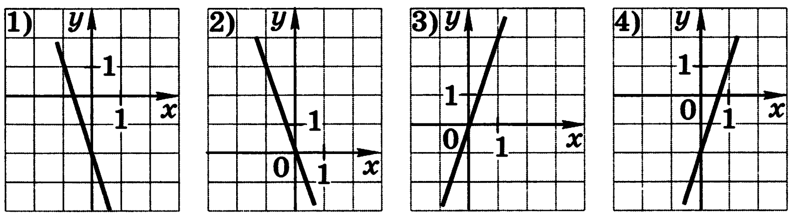
Ответ: ____________________

14 В геометрической прогрессии $b_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

А. $b_2 < b_3$ В. $b_3 > b_4$

Б. $b_4 > b_6$ Г. $b_5 > b_7$

15 Установите соответствие между графиками функций и формулами, задающими эти функции.

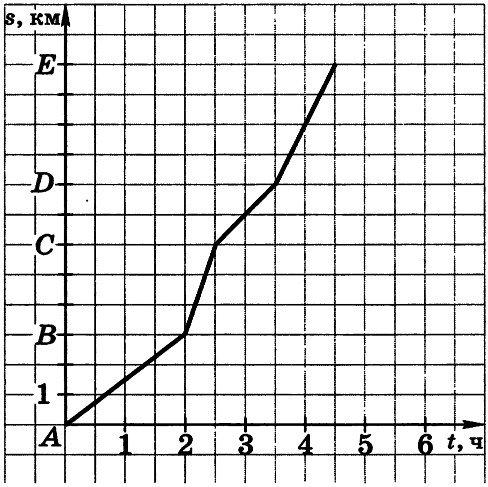


а) $y = 3x$ б) $y = -3x - 2$ в) $y = -3x$ г) $y = 3x - 2$

Ответ:

1	2	3	4

16 Плот плывет по реке. На рисунке изображен график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения t, по вертикальной — расстояние s, которое проплыл плот. На каком участке пути скорость течения реки наименьшая?



А. От A до B

Б. От B до C

В. От C до D

Г. От D до E

Работа № 2

Вариант 1

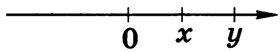
1 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{b}}$ при $c = 0{,}04$, $b = 0{,}25$.

Ответ: ____________________

2 Из формулы $Q = cm(t_2 - t_1)$ выразите t_2.

Ответ: ____________________

3 На координатной прямой отмечены числа x и y. Сравните числа $-x$ и $-y$.



А. $-x < -y$ В. $-x = -y$

Б. $-x > -y$ Г. Сравнить невозможно

4 Какое из чисел $\sqrt{4000}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{0{,}04}$ является иррациональным?

А. $\sqrt{4000}$ В. $\sqrt{0{,}04}$

Б. $\sqrt{400}$ Г. Все эти числа

5 При покупке стиральной машины стоимостью 6500 р. покупатель предъявил вырезанную из газеты рекламу, дающую право на скидку 5%. Сколько он заплатит за машину?

А. 325 р. Б. 3250 р. В. 6175 р. Г. 6495 р.

6 В выражении $4x^2 - 6xy$ вынесли за скобки общий множитель $-2x$. Какой двучлен остался в скобках?

А. $-2x - 3y$ В. $-2x + 3y$

Б. $2x - 3y$ Г. $2x + 3y$

7 Найдите значение выражения $(m^{-6})^{-2}m^{-14}$ при $m = \frac{1}{4}$.

А. -16 Б. $-\frac{1}{16}$ В. $\frac{1}{16}$ Г. 16

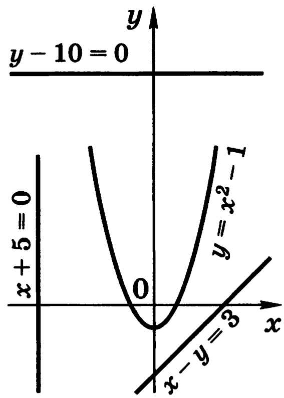
8 Упростите выражение $\frac{15a^2}{3a-2} - 5a$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $3(2 + 1{,}5x) = 0{,}5x + 24$.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображена парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая не имеет решений.



А. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x + 5 = 0 \end{cases}$

В. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y - 10 = 0 \end{cases}$

Г. Все три указанные системы

11 Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длиной 20 км ему потребовалось на 20 мин меньше, чем второму. Чему равны скорости велосипедистов?

Пусть x км/ч — скорость первого велосипедиста. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $\frac{20}{x} - \frac{20}{x-3} = \frac{1}{3}$ В. $\frac{20}{x-3} - \frac{20}{x} = 20$

Б. $\frac{20}{x-3} - \frac{20}{x} = \frac{1}{3}$ Г. $20x - 20(x - 3) = 20$

12 Какие из неравенств:
1) $xy > 200$; 2) $xy > 100$; 3) $xy > 400$ — верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих условию $x > 10$, $y > 20$?

А. 1 и 2

Б. 1 и 3

В. 2 и 3

Г. 1, 2 и 3

13 Решите неравенство $x^2 + 2x - 8 \leqslant 0$.

Ответ: ____________________

14 Какое из чисел является членом арифметической прогрессии 3; 6; 9; 12; ...?

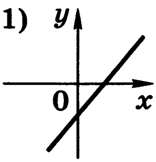
А. 83 В. 100

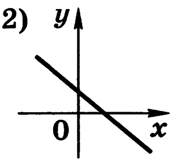
Б. 95 Г. 102

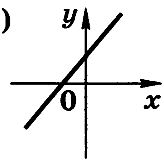
15 На рисунке изображены графики функций вида

$$y = kx + b.$$

Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов k и b.

1) 

2) 

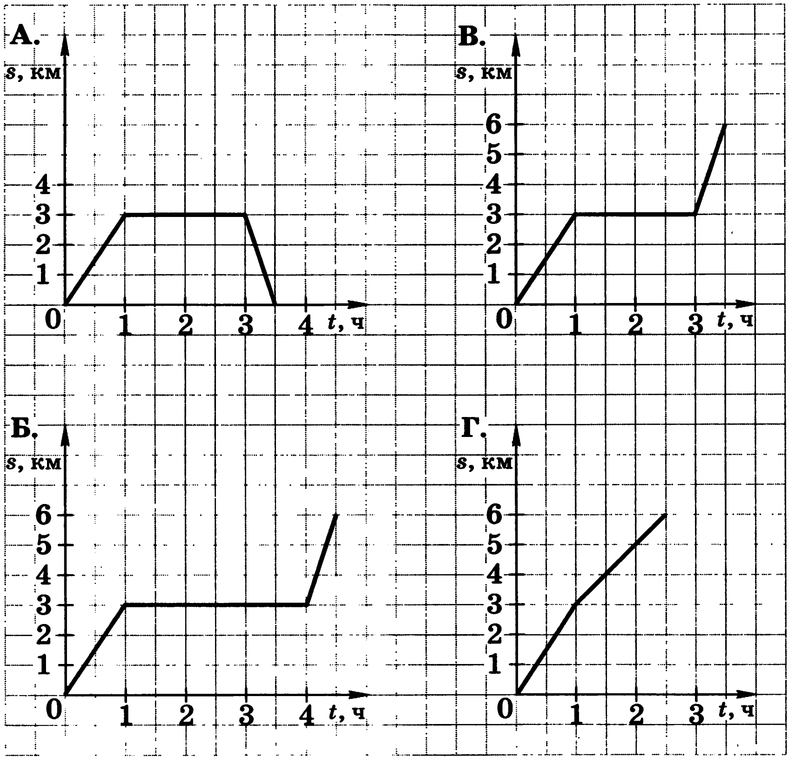
3) 

а) $k > 0$, $b > 0$ б) $k > 0$, $b < 0$ в) $k < 0$, $b > 0$

Ответ:

1	2	3

16 Туристы отправились с турбазы на озеро, провели там 2 ч и вернулись обратно. Какой из графиков описывает зависимость длины пути, пройденного туристами, от времени, которое они провели в походе?



Работа № 2

Вариант 2

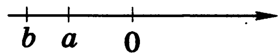
1. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{c}$ при $a = 0{,}16$, $c = 0{,}81$.

Ответ: ____________________

2. Из формулы $Q = cm(t_2 - t_1)$ выразите t_1.

Ответ: ____________________

3. На координатной прямой отмечены числа a и b. Сравните числа $-a$ и $-b$.



А. $-a < -b$ В. $-a = -b$

Б. $-a > -b$ Г. Сравнить невозможно

4. Какое из чисел $\sqrt{9000}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{0{,}009}$ является рациональным?

А. $\sqrt{9000}$ В. $\sqrt{0{,}009}$

Б. $\sqrt{900}$ Г. Ни одно из этих чисел

5. Плата за коммунальные услуги составляет 800 р. Сколько придется платить за коммунальные услуги после их подорожания на 6%?

А. 48 р. Б. 480 р. В. 806 р. Г. 848 р.

6. В выражении $9xy - 6y^2$ вынесли за скобки общий множитель $-3y$. Какой двучлен остался в скобках?

А. $-3x - 2y$ В. $3x - 2y$

Б. $-3x + 2y$ Г. $3x + 2y$

7 Найдите значение выражения $\frac{x^{-15}}{(x^3)^{-4}}$ при $x=\frac{1}{3}$.

А. -27 Б. 27 В. $-\frac{1}{27}$ Г. $\frac{1}{27}$

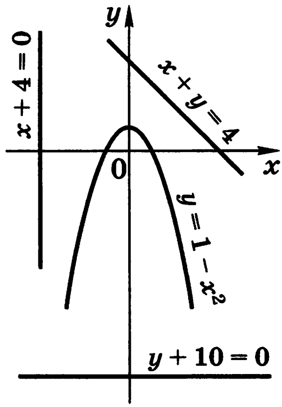
8 Упростите выражение $\frac{2x^2}{x-8}-2x$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $2x - 5,5 = 3(2x - 1,5)$.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображена парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет два решения.



А. $\begin{cases} y=1-x^2 \\ x+y=4 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} y=1-x^2 \\ x+4=0 \end{cases}$

В. $\begin{cases} y=1-x^2 \\ y+10=0 \end{cases}$

Г. Такой системы нет

11 Скорость первого пешехода на 1 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длиной 5 км ему потребовалось на 15 мин меньше, чем второму. Чему равны скорости пешеходов?

Пусть x км/ч — скорость первого пешехода. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x}=\frac{1}{4}$ В. $\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x}=15$

Б. $\frac{5}{x}-\frac{5}{x-1}=\frac{1}{4}$ Г. $5x - 5(x - 1) = 15$

12 Какие из неравенств:

1) $x + y < 25$; 2) $x + y < 30$; 3) $x + y < 40$ — верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих условию $x < 10$, $y < 20$?

А. 1 и 2

Б. 1 и 3

В. 2 и 3

Г. 1, 2 и 3

13 Решите неравенство $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$.

Ответ: ____________________

14 Какое из следующих чисел является членом арифметической прогрессии 6; 12; 18; 24; ...?

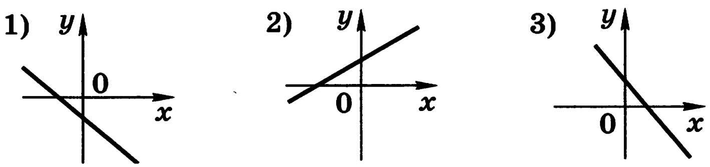
А. 303 В. 106

Б. 109 Г. 96

15 На рисунке изображены графики функций вида

$$y = kx + b.$$

Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов k и b.

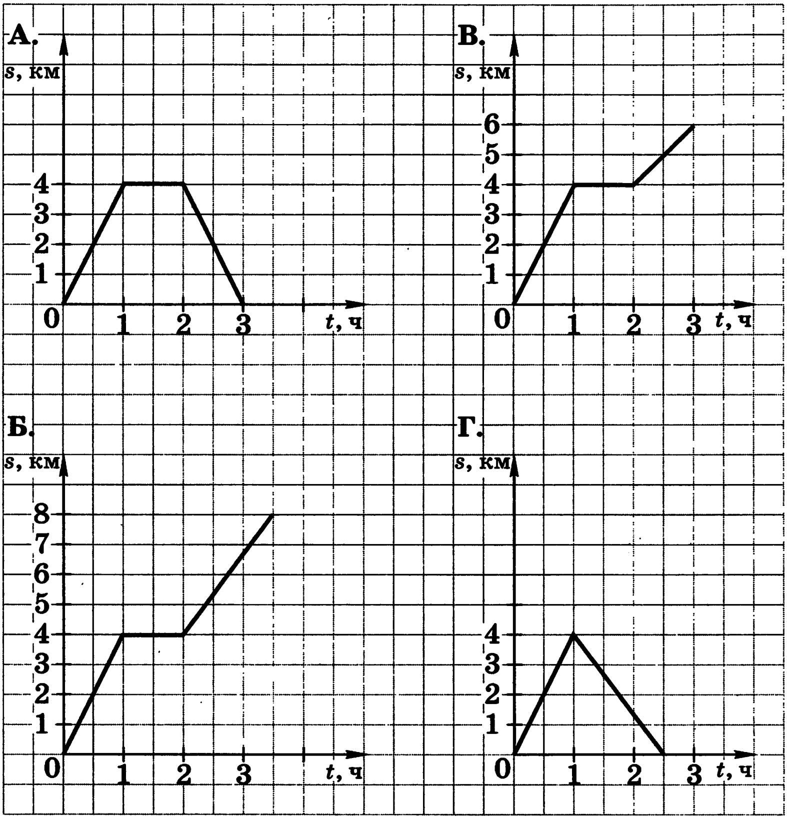


а) $k > 0$, $b > 0$ б) $k < 0$, $b > 0$ в) $k < 0$, $b < 0$

Ответ:

1	2	3

16 Туристы отправились с турбазы на озеро, провели там некоторое время и вернулись обратно той же дорогой. Какой из графиков описывает зависимость длины пути, пройденного туристами, от времени, которое они провели в походе?



Работа № 3

Вариант 1

1 Масса Луны равна $7,35 \cdot 10^{22}$ кг. Выразите массу Луны в миллионах тонн.

А. $7,35 \cdot 10^{10}$ млн т **В.** $7,35 \cdot 10^{16}$ млн т

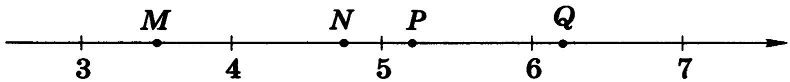
Б. $7,35 \cdot 10^{13}$ млн т **Г.** $7,35 \cdot 10^{19}$ млн т

2 На первый курс института может быть принято 180 человек. Число поданных заявлений составило 120% от количества мест на курсе. Сколько заявлений было подано?

А. 36 **Б.** 150 **В.** 216 **Г.** 300

3 Соотнесите с соответствующей точкой координатной прямой каждое из чисел:

1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{12}$; 3) $\sqrt{39}$.



Ответ:

1	2	3

4 Расстояние s (в метрах), которое пролетает тело при свободном падении, можно приближенно вычислить по формуле $s = vt + 5t^2$, где v — начальная скорость (в метрах в секунду), t — время падения (в секундах). На какой высоте над землей окажется камень, упавший с высоты 80 м, через 3 с падения, если его начальная скорость равна 7 м/с?

Ответ: ____________________

5 Какое из выражений не имеет смысла при $x = 2$ и $x = 3$?

А. $\frac{x-2}{x-3}$ В. $\frac{3}{(x-2)(x-3)}$

Б. $\frac{x-3}{x-2}$ Г. $\frac{(x-2)(x-3)}{3}$

6 Упростите выражение $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\cdot\frac{1}{a-b}$.

Ответ: ____________________

7 Вычислите значение выражения $\frac{4^{-12}}{4^{-8}\cdot 4^{-2}}$.

А. $\frac{1}{16}$ Б. $-\frac{1}{16}$ В. 16 Г. −16

8 Найдите площадь квадрата со стороной, равной $\sqrt{3}-1$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x}{12}=-5$.

Ответ: ____________________

10 Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 10$ и прямой $y = 4x + 11$.

А. (39; 7) и (−1; −3) В. (−3; 7) и (−1; 39)

Б. (7; −3) и (39; −1) Г. (7; 39) и (−3; −1)

11 Расстояние по реке между двумя деревнями равно 2 км. На путь туда и обратно моторная лодка затратила 22 мин. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч?

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $2(x + 1) + 2(x - 1) = 22$ В. $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{2}=\frac{11}{30}$

Б. $\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{11}{30}$ Г. $\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}=22$

12 Решите неравенство $5x - 2(x - 4) \leqslant 9x + 20$.

А. $x \leqslant 2$ В. $x \leqslant -2$

Б. $x \geqslant 2$ Г. $x \geqslant -2$

13 Решите неравенство $3x - x^2 > 0$.

А. $x < 0$ В. $x < 0$ или $x > 3$

Б. $x > 3$ Г. $0 < x < 3$

14 Какая из последовательностей является арифметической прогрессией?

А. Последовательность натуральных степеней числа 2

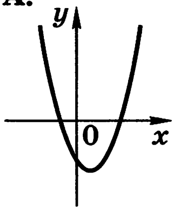
Б. Последовательность натуральных чисел, кратных 7

В. Последовательность квадратов натуральных чисел

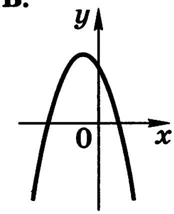
Г. Последовательность чисел, обратных натуральным

15 Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком рисунке изображен график этой функции, если известно, что $a > 0$ и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня?

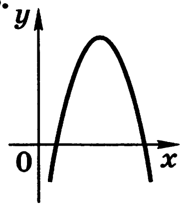
А.



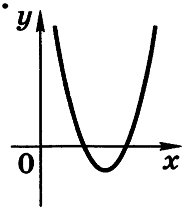
В.



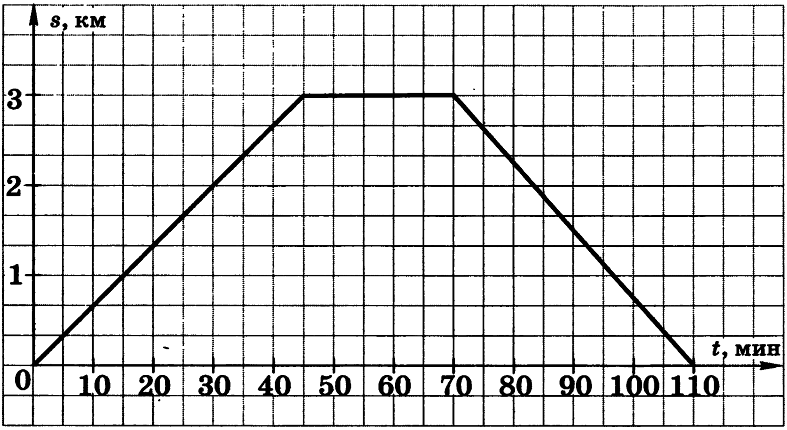
Б.



Г.



16 Турист отправился из лагеря к озеру, отдохнул у озера и вернулся обратно. На рисунке изображен график движения туриста (по горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — расстояние, на котором находится турист от лагеря). Найдите скорость туриста на обратном пути, выразив ее в километрах в час.



Ответ: ____________________

Работа № 3

Вариант 2

1 Масса Меркурия равна $3{,}3 \cdot 10^{23}$ кг. Выразите массу Меркурия в миллионах тонн.

А. $3{,}3 \cdot 10^{21}$ млн т   **В.** $3{,}3 \cdot 10^{15}$ млн т

Б. $3{,}3 \cdot 10^{17}$ млн т   **Г.** $3{,}3 \cdot 10^{14}$ млн т

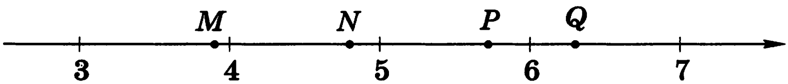
2 В декабре каждому сотруднику предприятия выплатили премию, составившую 130% его месячной заработной платы. Какую премию получил сотрудник, зарплата которого равна 5500 р.?

А. 71 500 р.   **В.** 5630 р.

Б. 7150 р.   **Г.** 1650 р.

3 Соотнесите с соответствующей ему точкой координатной прямой каждое из чисел:

1) $\sqrt{40}$;   2) $\sqrt{15}$;   3) $\sqrt{23}$.



Ответ:

1	2	3

4 Высоту h (в метрах), на которой через t с окажется тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v (в метрах в секунду), можно приближенно вычислить по формуле $h = vt - 5t^2$. На сколько выше взлетит за 1 с мяч, подброшенный вертикально вверх, при начальной скорости 18 м/с, чем при начальной скорости 14 м/с?

Ответ: ____________________

$\boxed{5}$ Какое из выражений не имеет смысла при $x = 1$ и $x = 5$?

А. $\frac{x}{(x-1)(x-5)}$ Б. $\frac{x}{(x+1)(x+5)}$ В. $\frac{x-1}{x-5}$ Г. $\frac{x-5}{x-1}$

$\boxed{6}$ Упростите выражение $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}$.

Ответ: ____________________

$\boxed{7}$ Вычислите значение выражения $\frac{6^{-4}\cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$.

А. 6 Б. $\frac{1}{6}$ В. $-\frac{1}{6}$ Г. -6

$\boxed{8}$ Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{5}+1$ и $\sqrt{5}-1$.

Ответ: ____________________

$\boxed{9}$ Решите уравнение $\frac{x}{5}-\frac{x}{2}=-3$.

Ответ: ____________________

$\boxed{10}$ Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 15$ и прямой $y = 2x + 9$.

А. $(-4;\ 6)$ и $(1;\ 21)$ В. $(21;\ 6)$ и $(1;\ -4)$

Б. $(6;\ -4)$ и $(21;\ 1)$ Г. $(6;\ 21)$ и $(-4;\ 1)$

$\boxed{11}$ Моторная лодка курсирует между двумя пристанями, расстояние между которыми по реке равно 4 км. На путь по течению у нее уходит на 3 мин меньше, чем на путь против течения. Чему равна скорость течения реки, если известно, что скорость лодки в стоячей воде равна 18 км/ч?

Пусть x км/ч — скорость течения реки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $\frac{4}{18-x}-\frac{4}{18+x}=\frac{1}{20}$ В. $\frac{4}{18+x}-\frac{4}{18-x}=\frac{1}{20}$

Б. $\frac{18-x}{4}-\frac{18+x}{4}=3$ Г. $4(18 + x) - 4(18 - x) = 3$

12 Решите неравенство $2x - 3(x + 4) < x + 12$.

А. $x > -12$ В. $x < -12$

Б. $x > 12$ Г. $x < 12$

13 Решите неравенство $5x - x^2 < 0$.

А. $0 < x < 5$ В. $x > 5$

Б. $x < 0$ Г. $x < 0$ или $x > 5$

14 Какая из последовательностей является геометрической прогрессией?

А. Последовательность натуральных чисел, кратных 3

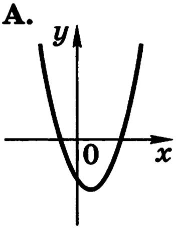
Б. Последовательность кубов натуральных чисел

В. Последовательность натуральных степеней числа 3

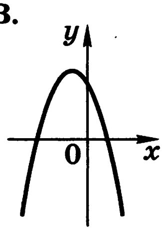
Г. Последовательность чисел, обратных натуральным

15 Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком рисунке изображен график этой функции, если известно, что $a < 0$ и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня разных знаков?

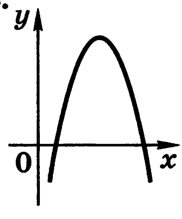
А.



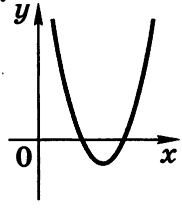
В.



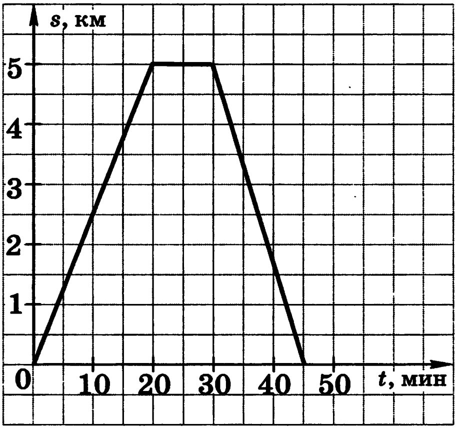
Б.



Г.



16 Велосипедист выехал из дома, доехал до почты и, пробыв там некоторое время, вернулся домой. На рисунке изображен график его движения (по горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — расстояние, на котором находится велосипедист от дома). Найдите скорость велосипедиста на обратном пути, выразив ее в километрах в час.



Ответ: ____________________

Работа № 4

Вариант 1

1 Найдите значение выражения $-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-1$ при $x=-1$.

Ответ: ____________________

2 Выразите из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$ время t.

А. $t=\frac{v-v_0}{a}$ **В.** $t = a(v - v_0)$

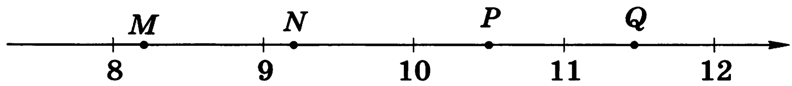
Б. $t=\frac{v_0-v}{a}$ **Г.** $t=\frac{a}{v-v_0}$

3 Запишите число 0,00018 в стандартном виде.

А. $1{,}8 \cdot 10^{-6}$ **В.** $1{,}8 \cdot 10^{-4}$

Б. $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ **Г.** $1{,}8 \cdot 10^{-3}$

4 Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{85}$. Какая это точка?



А. M **Б.** N **В.** P **Г.** Q

5 На выборах в городскую думу голоса между партиями A и B распределились в отношении 1 : 4. Сколько процентов избирателей проголосовало за партию B?

А. 20% **В.** 40%

Б. 25% **Г.** 80%

$\boxed{6}$ Какое из выражений тождественно равно дроби $\frac{x-y}{2x-y}$?

А. $-\frac{y-x}{2x-y}$ **Б.** $\frac{y-x}{2x-y}$ **В.** $\frac{x-y}{y-2x}$ **Г.** $-\frac{y-x}{y-2x}$

$\boxed{7}$ Упростите выражение $3(a-1)^2+6a$.

Ответ: ____________________

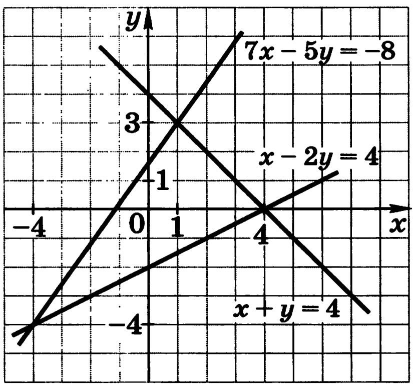
$\boxed{8}$ Найдите значение выражения $2\sqrt{2}\cdot5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$.

А. 60 **Б.** 30 **В.** 12 **Г.** $10\sqrt{6}$

$\boxed{9}$ Решите уравнение $2x^2+3x-5=0$.

Ответ: ____________________

$\boxed{10}$ Пользуясь рисунком, запишите систему уравнений, решением которой является пара $x=4$, $y=0$.



Ответ: ____________________

11 В классе 25 учащихся. При посадке деревьев в школьном саду каждая девочка посадила по 2 дерева, а каждый мальчик — по 3 дерева. Всего было посажено 63 дерева. Сколько в классе девочек и сколько мальчиков?

Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

А. $\begin{cases} x+y=25 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=63 \end{cases}$

В. $\begin{cases} x+y=25 \\ 3x+2y=63 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x+y=25 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=63 \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+3y=63 \end{cases}$

12 Известно, что $a > b$. Какое из следующих неравенств неверно?

А. $a + 5 > b + 5$

Б. $-5a < -5b$

В. $a - 5 < b - 5$

Г. $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$

13 Решите неравенство $x^2 \leqslant 4$.

Ответ: ______________________

14 В первом ряду амфитеатра концертного зала 30 мест, а в каждом следующем на 4 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в ряду с номером n?

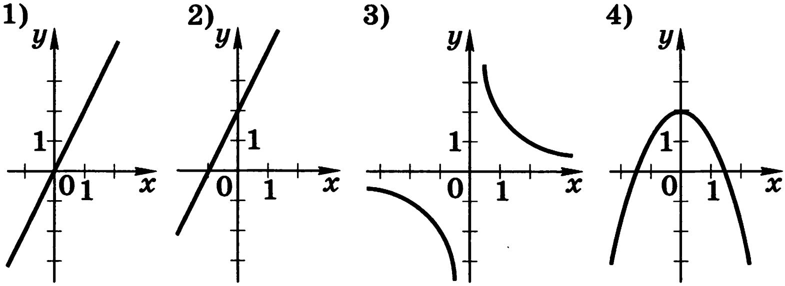
А. $30 + 4n$

Б. $26 + 4n$

В. $34 + 4n$

Г. $4n$

15 Каждый график соотнесите с соответствующей ему формулой.

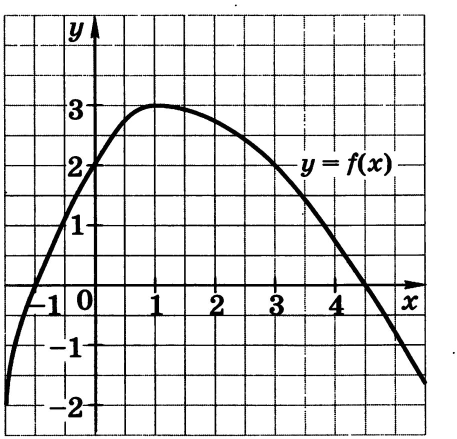


а) $y = \frac{2}{x}$ б) $y = 2x$ в) $y = 2 - x^2$ г) $y = 2x + 2$

Ответ:

1	2	3	4

16 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Из приведенных утверждений выберите верное.



А. $f(-1) > f(3)$

Б. Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[1; +\infty)$

В. $f(2) = 0$

Г. Наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно 1

Работа № 4

Вариант 2

1 Найдите значение выражения $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$ при $x = -1$.

Ответ: ____________________

2 Выразите из формулы пути равномерного движения $s = s_0 + vt$ время t.

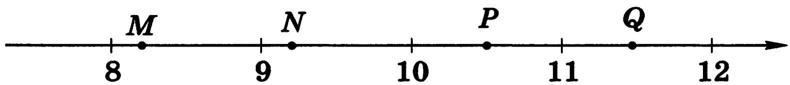
А. $t=\frac{s_0+s}{v}$ Б. $t=\frac{s-s_0}{v}$ В. $t=\frac{v}{s+s_0}$ Г. $t=\frac{v}{s_0-s}$

3 Запишите число $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ в виде десятичной дроби.

А. 0,00036 В. 0,0000036

Б. 0,000036 Г. 0,00000036

4 Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{68}$. Какая это точка?



А. M Б. N В. P Г. Q

5 На выборах в городскую думу голоса между партиями A и B распределились в отношении 3 : 2. Сколько процентов избирателей проголосовало за партию A?

А. 60% В. 30%

Б. 33% Г. 20%

6 Какое из выражений тождественно равно дроби $\frac{m-n}{m-2n}$

А. $-\frac{m-n}{m-2n}$ Б. $\frac{m-n}{2n-m}$ В. $\frac{n-m}{m-2n}$ Г. $\frac{n-m}{2n-m}$

7 Упростите выражение $8x + 4(1 - x)^2$.

Ответ: ____________________

8 Найдите значение выражения $3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$.

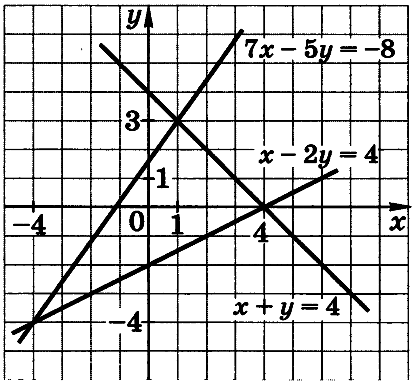
А. 30 Б. 40 В. 120 Г. $12\sqrt{10}$

9 Решите уравнение $5x^2 + 4x - 1 = 0$.

Ответ: ____________________

10 Пользуясь рисунком, решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 7x-5y=-8. \end{cases}$$



Ответ: ______________

11 В классе 18 учащихся. Для поливки сада каждая девочка принесла по 2 ведра воды, а каждый мальчик — по 5 ведер. Всего было принесено 57 ведер воды. Сколько в классе девочек и сколько мальчиков?

Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

А. $\begin{cases} x+y=18 \\ 2x+5y=57 \end{cases}$

В. $\begin{cases} x+y=18 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=57 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x+y=18 \\ 5x+2y=57 \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x+y=18 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=57 \end{cases}$

12 Известно, что $x > y$. Какое из следующих неравенств неверно?

А. $x - 3 > y - 3$

Б. $-x < -y$

В. $x + 3 > y + 3$

Г. $\frac{x}{3} < \frac{y}{3}$

13 Решите неравенство $x^2 \geqslant 1$.

Ответ: ______________________

14 В первый день после нарушения автомобилистом правил дорожного движения штраф составляет 200 р., а в каждый последующий день штраф увеличивается на 10 р. по сравнению с предыдущим. Какой штраф придется заплатить автомобилисту на n-й день после нарушения правил?

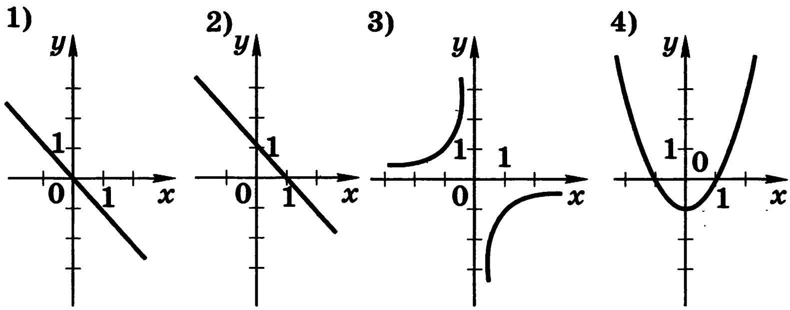
А. $190 + 10n$

Б. $200 + 10n$

В. $210 + 10n$

Г. $10n$

15 Каждый график соотнесите с соответствующей формулой.

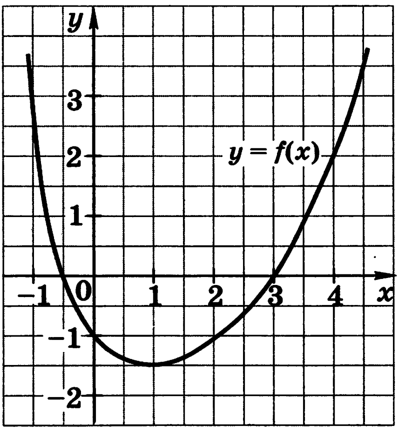


а) $y = -\frac{1}{x}$ б) $y = x^2 - 1$ в) $y = -x$ г) $y = 1 - x$

Ответ:

1	2	3	4

16 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Из приведенных утверждений выберите верное.



А. $f(-1) < f(2)$

Б. Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$

В. $f(0) = 2$

Г. Функция принимает наименьшее значение при $x = 3$

Работа № 5

Вариант 1

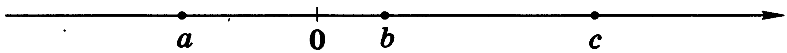
1 Найдите значение выражения $2y^2 + y + 3$ при $y = -\frac{1}{4}$.

Ответ: ____________________

2 После уценки телевизора его новая цена составила 0,8 старой. Сколько процентов от старой цены составляет новая?

А. 0,8%   **Б.** 8%   **В.** 20%   **Г.** 80%

3 На координатной прямой отмечены числа a, b и c. Какое из приведенных утверждений неверно?



А. $ab < 0$ **В.** $a + b < 0$

Б. $abc < 0$ **Г.** $a + c < 0$

4 За 3 ч мотоциклист проехал a км. Скорость велосипедиста в 2 раза меньше скорости мотоциклиста. Какое расстояние проедет велосипедист за 5 ч?

А. $\frac{5a}{6}$ км   **Б.** $\frac{6}{5a}$ км   **В.** $\frac{15}{2a}$ км   **Г.** $\frac{2a}{15}$ км

5 Известно, что a — четное число, b — нечетное число. Какое из следующих чисел является нечетным?

А. ab

Б. $2(a + b)$

В. $a + b$

Г. $a + b + 1$

6 Упростите выражение $\frac{2x-2y}{y} \cdot \frac{3y^2}{x^2-y^2}$.

Ответ: ____________________

7 Найдите значение произведения $(1{,}2 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^{-1})$.

А. 0,0036

Б. 0,00036

В. 0,000036

Г. 3600

8 Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}$, 3.

А. 3, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}$

Б. $2\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, 3

В. $\sqrt{10}$, 3, $2\sqrt{3}$

Г. $\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}$, 3

9 Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

1) $x^2 = x$ 2) $x^2 = -x$ 3) $x^2 = -1$ 4) $x^2 = 1$

а) 1 и -1 б) 0 и 1 в) 0 и -1 г) Корней нет

Ответ:

1	2	3	4

10 Андрей старше Олега на 4 года, а Олег старше Бориса в 1,5 раза. Вместе им 36 лет. Сколько лет Борису?

А. 16 лет

Б. 12 лет

В. 8 лет

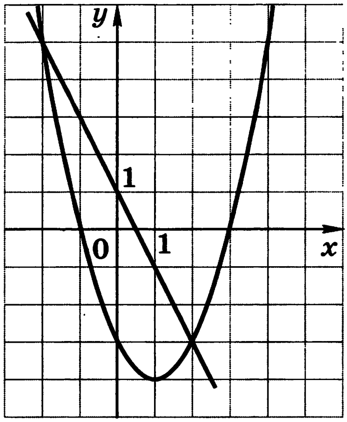
Г. 6 лет

11 На рисунке изображены графики функций

$$y = x^2 - 2x - 3 \text{ и } y = 1 - 2x.$$

Используя графики, решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 1 - 2x. \end{cases}$$



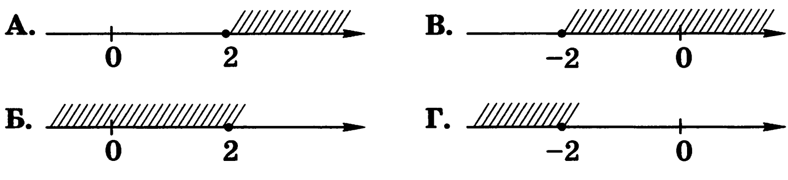
Ответ: ______________________

12 О числах a, b, c и d известно, что $a < b$, $b = c$, $d > c$. Сравните d и a.

А. $d = a$ В. $d > a$

Б. $d < a$ Г. Сравнить невозможно

13 Решите неравенство $3x + 5 \leqslant 7x - 3$ и укажите, на каком рисунке изображено множество его решений.



14 Арифметическая прогрессия задана условиями: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

А. 14 Б. 18 В. 22 Г. 25

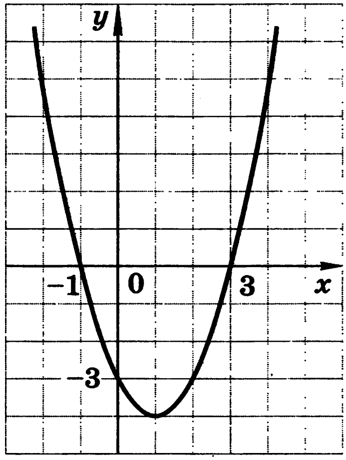
15 На рисунке изображен график квадратичной функции. Какая из перечисленных ниже формул задает эту функцию?

А. $y = -x^2 + 4x - 3$

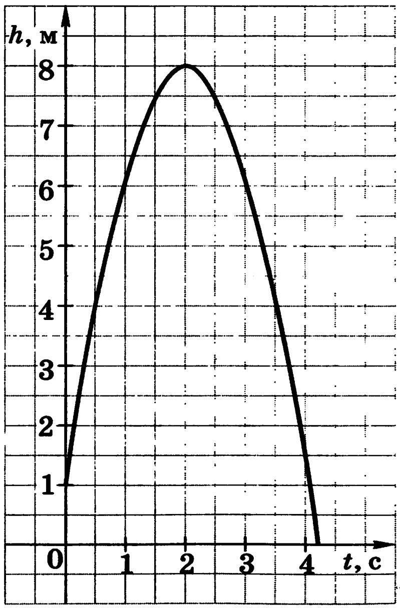
Б. $y = x^2 + 2x - 3$

В. $y = -x^2 - 4x - 3$

Г. $y = x^2 - 2x - 3$



16 Мяч подбросили вертикально вверх, и он упал на землю. На рисунке изображен график зависимости высоты мяча над землей от времени полета. Используя график, выясните, сколько метров пролетел мяч за первые 3 с.



Ответ: ____________________

Работа № 5

Вариант 2

1 Найдите значение выражения $2a^2 + a + 1$ при $a = -\frac{1}{4}$.

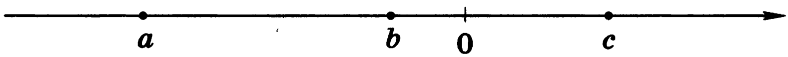
Ответ: ____________________

2 Число дорожно-транспортных происшествий в летний период составило 0,7 их числа в зимний период. На сколько процентов уменьшилось число дорожно-транспортных происшествий летом по сравнению с зимой?

А. На 70% **В.** На 7%

Б. На 30% **Г.** На 3%

3 На координатной прямой отмечены числа a, b и c. Какое из приведенных утверждений неверно?



А. $a + b < 0$ **В.** $ab < 0$

Б. $b + c > 0$ **Г.** $abc > 0$

4 За a ч пешеход прошел 17 км. Скорость велосипедиста в 3 раза больше скорости пешехода. Какое расстояние проедет велосипедист за b ч?

А. $\frac{17 \cdot 3 \cdot b}{a}$ км **В.** $\frac{a \cdot 17}{3b}$ км

Б. $\frac{a \cdot 3 \cdot b}{17}$ км **Г.** $\frac{ab}{17 \cdot 3}$ км

5 Известно, что a — четное число, b — нечетное число. Какое из следующих чисел является четным?

А. $a + b$ **Б.** $3(a + b)$ **В.** $(a + 1)b$ **Г.** ab

$\boxed{6}$ Упростите выражение $\frac{x^2 - y^2}{2xy} \cdot \frac{2y}{3x - 3y}$.

Ответ: ____________________

$\boxed{7}$ Найдите значение произведения $(2{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{-2})$.

А. 0,00048

Б. 0,000048

В. 0,0000048

Г. 4800000

$\boxed{8}$ Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{15}$, $3\sqrt{2}$, 4.

А. $4,\ \sqrt{15},\ 3\sqrt{2}$

Б. $\sqrt{15},\ 3\sqrt{2},\ 4$

В. $3\sqrt{2},\ 4,\ \sqrt{15}$

Г. $\sqrt{15},\ 4,\ 3\sqrt{2}$

$\boxed{9}$ Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

1) $x^2 - 1 = 0$ 2) $x^2 + 1 = 0$ 3) $x = x^2$ 4) $x^2 = -x$

а) 0 и -1 б) 0 и 1 в) 1 и -1 г) Корней нет

Ответ:

1	2	3	4

$\boxed{10}$ Бабушка старше мамы на 20 лет, а мама старше дочери в 5 раз. Вместе им 86 лет. Сколько лет дочери?

А. 16 лет

Б. 12 лет

В. 11 лет

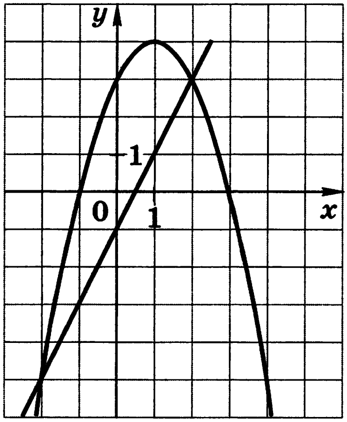
Г. 6 лет

11 На рисунке изображены графики функций

$$y = -x^2 + 2x + 3 \text{ и } y = 2x - 1.$$

Используя графики, решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$



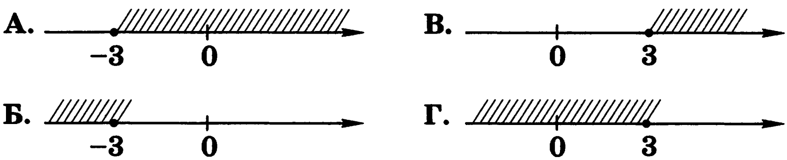
Ответ: ____________________

12 О числах a, b, c и d известно, что $a > b$, $b = c$, $d < c$. Сравните d и a.

А. $d = a$ В. $d > a$

Б. $d < a$ Г. Сравнить невозможно

13 Решите неравенство $x + 4 \geqslant 4x - 5$ и укажите, на каком рисунке изображено множество его решений.



14 Арифметическая прогрессия задана условиями: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 4$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

А. 38 Б. 30 В. 28 Г. 22

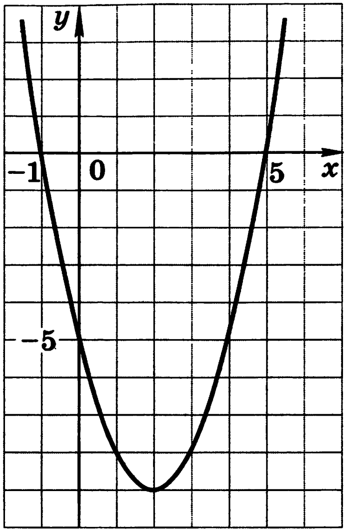
15 На рисунке изображен график квадратичной функции. Какая из перечисленных ниже формул задает эту функцию?

А. $y = x^2 + 2x - 8$

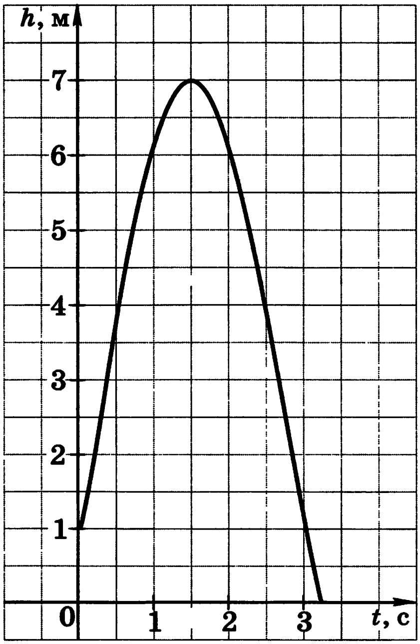
Б. $y = x^2 - 4x - 5$

В. $y = x^2 - 2x - 8$

Г. $y = x^2 + 4x - 5$



16 Мяч подбросили вертикально вверх, и он упал на землю. График, изображенный на рисунке, показывает, как менялась за время полета высота мяча над землей. Используя график, выясните, сколько метров пролетел мяч за первые 2 с.



Ответ: ________________

Работа № 6

Вариант 1

1 Найдите значение выражения $\sqrt{a^2+b^2}$ при $a = 12$, $b = -5$.

Ответ: ____________________

2 Выразите из формулы $F = 1{,}8C + 32$ переменную C.

А. $C=\frac{F-32}{1{,}8}$ В. $C=\frac{F-1{,}8}{32}$

Б. $C=\frac{F+32}{1{,}8}$ Г. $C = 1{,}8F - 3$

3 Известно, что a и b — положительные числа и $a > b$. Сравните $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$.

А. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ В. $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

Б. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ Г. Сравнить невозможно

4 На пост спикера парламента претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 252 депутата. Голоса между кандидатами распределились в отношении 2 : 7. Сколько голосов получил проигравший?

А. 280 Б. 196 В. 56 Г. 28

5 Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты.

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 0,08 4) 0,8

а) 50% б) 80% в) 75% г) 8%

Ответ:

1	2	3	4

$\boxed{6}$ Укажите выражение, тождественно равное многочлену $4x^2 - 6xy$.

А. $-2x(-3y - 2x)$ В. $-2x(3y + 2x)$

Б. $-2x(3y - 2x)$ Г. $-2x(-2x - 3y)$

$\boxed{7}$ Выполните деление: $\frac{a^2+4a+4}{a}:(a^2+2a)$.

Ответ: ____________________

$\boxed{8}$ Представьте выражение $(a^{-6})^{-2} \cdot a^{-14}$ в виде степени с основанием a.

Ответ: ____________________

$\boxed{9}$ Решите уравнение $\frac{x+9}{3}-\frac{x-1}{5}=2$.

А. -23 Б. -20 В. -6 Г. -9

$\boxed{10}$ Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = 2x^2 - 5$ и прямой $y = 4x - 5$.

А. $(0; 2)$ и $(-5; 3)$ В. $(0; -5)$ и $(3; 2)$

Б. $(-5; 0)$ и $(2; 3)$ Г. $(0; -5)$ и $(2; 3)$

$\boxed{11}$ На двух принтерах распечатали 340 страниц. Первый принтер работал 10 мин, а второй — 15 мин. Производительность первого принтера на 4 страницы в минуту больше, чем второго. Сколько страниц в минуту можно распечатать на каждом принтере?

Пусть производительность первого принтера — x страниц в минуту. Какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $15x + 10(x - 4) = 340$

Б. $10x + 15(x + 4) = 340$

В. $10x + 15(x - 4) = 340$

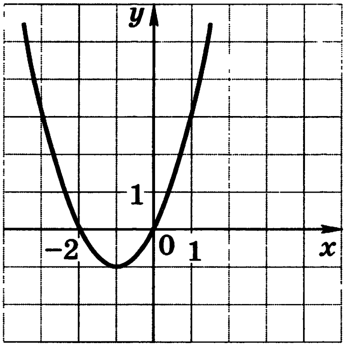
Г. $\frac{x}{10}+\frac{x-4}{15} = 340$

12 Решите неравенство $3(3x - 1) > 10x - 14$.

А. $(-\infty; 11)$ В. $(-\infty; -11)$

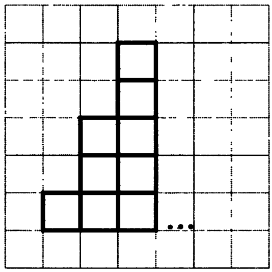
Б. $(11; +\infty)$ Г. $(-11; +\infty)$

13 На рисунке изображен график функции $y = x^2 + 2x$. Используя этот график, решите неравенство $x^2 + 2x \leqslant 0$.



Ответ: ____________________

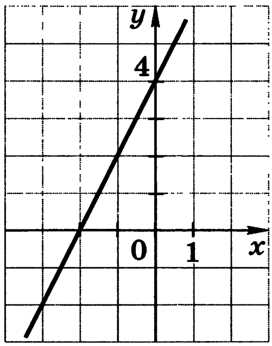
14 Фигура составляется из столбиков так, как показано на рисунке. В каждом следующем столбике на 2 квадрата больше, чем в предыдущем. Сколько квадратов в 20-м столбике?



А. 20 В. 40

Б. 39 Г. 41

15 График какой функции изображен на рисунке?



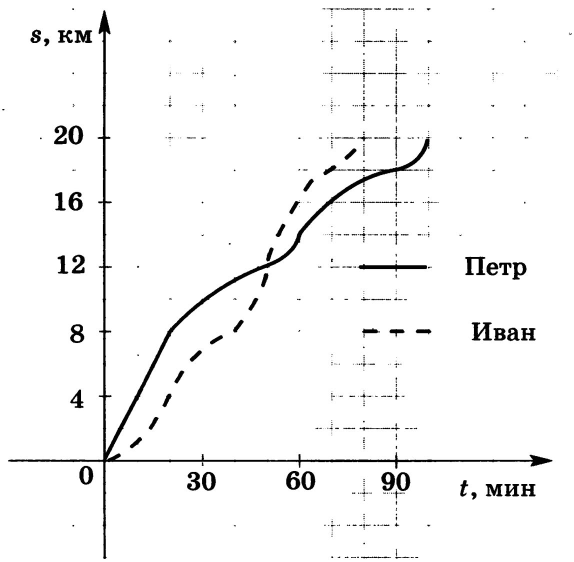
А. $y = 2x + 4$

Б. $y = -2x + 4$

В. $y = x^2 - 4$

Г. $y = -x^2 + 4$

16 Два спортсмена, Петр и Иван, во время тренировки пробежали 20 км. Графики их бега представлены на рисунке. Кто из них затратил меньше времени на отрезок дистанции от 8-го до 16-го километра и на сколько?



Ответ: ______________________

Работа № 6

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2-y^2}$ при $x = 10$ и $y = -6$.

Ответ: ____________________

2. Выразите из формулы $v = 20 - 2{,}5t$ время t.

А. $t=\frac{v+20}{2{,}5}$ В. $t=\frac{20-v}{2{,}5}$

Б. $t=\frac{v-20}{2{,}5}$ Г. $t = 20 - 2{,}5v$

3. Известно, что a и b — отрицательные числа и $a > b$. Сравните $-a$ и $-b$.

А. $-a > -b$ В. $-a = -b$

Б. $-a < -b$ Г. Сравнить невозможно

4. На пост председателя городской думы претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 198 человек, причем голоса распределились между кандидатами в отношении 8 : 3. Сколько голосов получил победитель?

А. 180 Б. 144 В. 54 Г. 18

5. Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты.

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{4}{5}$ 3) 0,4 4) 0,04

а) 40% б) 25% в) 80% г) 4%

Ответ:

1	2	3	4

6 Укажите выражение, тождественно равное многочлену $10ab - 6b^2$.

А. $-2b(-3b - 5a)$ В. $-2b(5a + 3b)$

Б. $-2b(5a - 3b)$ Г. $-2b(3b - 5a)$

7 Выполните деление: $(x-3):\frac{x^2-6x+9}{x+3}$.

Ответ: ____________________

8 Представьте выражение $\frac{a^{-9}}{(a^2)^{-3}}$ в виде степени с основанием a.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $\frac{x-4}{2}-\frac{x-2}{5}=2$.

А. 6 Б. $8\frac{2}{3}$ В. $14\frac{2}{3}$ Г. 12

10 Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = 3x^2 + 2$ и прямой $y = -6x + 2$.

А. (2; 0) и (−2; 14) В. (0; 2) и (14; −2)

Б. (0; 2) и (−2; 14) Г. (0; −2) и (2; 14)

11 Первый автомат упаковывает в минуту на 2 пачки печенья больше, чем второй. Первый автомат работал 10 мин, а второй — 20 мин. Всего за это время было упаковано 320 пачек печенья. Сколько пачек печенья в минуту упаковывает каждый автомат?

Пусть производительность первого автомата — x пачек в минуту. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $10x + 20(x - 2) = 320$

Б. $10x + 20(x + 2) = 320$

В. $20x + 10(x + 2) = 320$

Г. $\frac{x}{10}+\frac{x-2}{20}=320$

12 Решите неравенство $5x + 20 < 2(4x - 5)$.

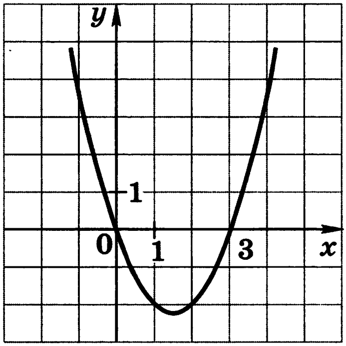
А. $(-10; +\infty)$

Б. $(-\infty; -10)$

В. $(10; +\infty)$

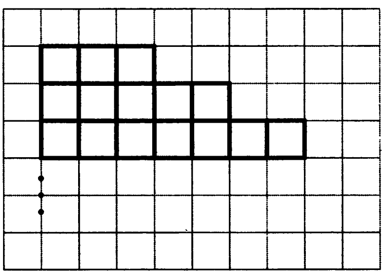
Г. $(-\infty; 10)$

13 На рисунке изображен график функции $y = x^2 - 3x$. Используя этот график, решите неравенство $x^2 - 3x \geqslant 0$.



Ответ: ____________________

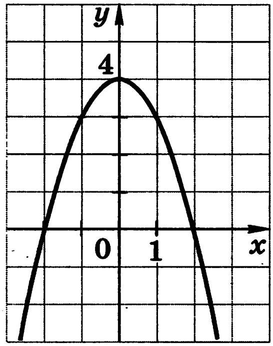
14 Фигура составляется из квадратов так, как показано на рисунке. В каждом следующем ряду на 2 квадрата больше, чем в предыдущем. Сколько квадратов в 15-м ряду?



А. 35 В. 31

Б. 33 Г. 15

15 График какой функции изображен на рисунке?



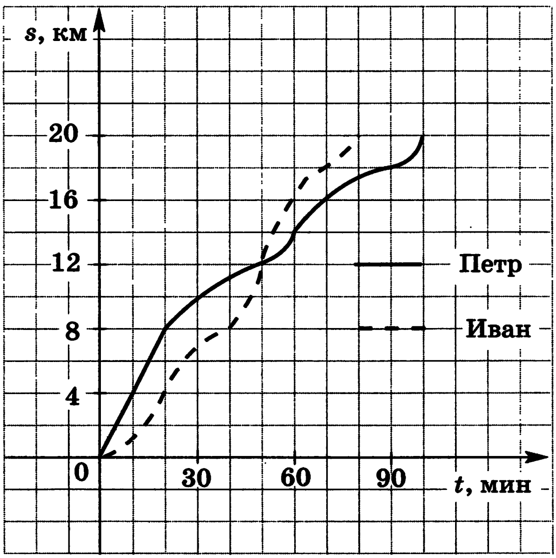
А. $y = 2x + 4$

Б. $y = -2x + 4$

В. $y = x^2 - 4$

Г. $y = -x^2 + 4$

16 Два спортсмена, Петр и Иван, во время тренировки пробежали 20 км. Графики их бега представлены на рисунке. Кто из них пробежал большее расстояние за вторые полчаса тренировки и на сколько?



Ответ: ____________________

Работа № 7

Вариант 1

1 В таблице приведены результаты забега на 200 м шести участников школьных соревнований.

Номер дорожки	I	II	III	IV	V	VI
Результат, с	30,17	27,31	28,93	28,50	27,80	24,32

По какой дорожке бежал школьник, показавший третий результат?

А. По VI Б. По V В. По IV Г. По III

2 Средний вес мальчиков того же возраста, что и Сергей, равен 48 кг. Вес Сергея составляет 120% среднего веса. Сколько весит Сергей?

А. 57,8 кг Б. 57,6 кг В. 40 кг Г. 9,6 кг

3 Какое из чисел является лучшим приближением числа $\sqrt{8}$?

А. 2 Б. 2,7 В. 2,8 Г. 3

4 Какое из чисел не входит в область определения выражения $\sqrt{4-x}$?

А. −6 Б. 0 В. 4 Г. 8

5 Расстояние s (в метрах), которое пролетает тело при свободном падении за время t (в секундах), можно приближенно вычислить по формуле $s = 5t^2$. За какое время камень, упавший с высоты 80 м, достигнет земли?

Ответ: ____________________

6 Преобразуйте в многочлен выражение

$$4c(c - 2) - (c - 4)^2.$$

Ответ: ____________________

7 Найдите значение выражения $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^2)$.

А. 6400

Б. 0,064

В. 0,0064

Г. 0,00064

8 Упростите выражение $\frac{x}{x^2 - y^2} \cdot (xy - y^2)$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $4x - 4{,}5 = 5x - 3(2x - 1{,}5)$.

А. $-1{,}8$ Б. 0 В. 1,2 Г. 1,8

10 От города до поселка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то затратил бы на этот путь на 1 ч меньше. Чему равно расстояние от города до поселка?

Пусть x км — расстояние от города до поселка. Какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 25$

Б. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 25$

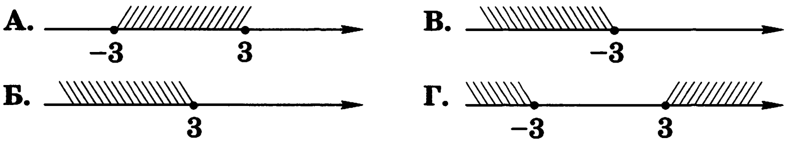
В. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x} = 25$

Г. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x} = 25$

11 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 3y = -9 \\ x + y = 3. \end{cases}$

Ответ: ____________________

12 На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 9 \leqslant 0$?



13 Известно, что $x > y$. Из следующих неравенств выберите те, которые верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих этому условию:

1) $x - y < 0$;
2) $x - y > -5$;
3) $y - x < -3$;
4) $y - x < 1$.

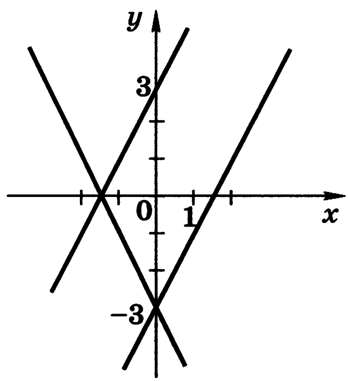
А. 1) и 3)
Б. 1) и 2)
В. 2) и 4)
Г. 3) и 4)

14 Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 3$, $b_{n+1} = b_n \cdot 2$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

А. $b_n = 3 \cdot 2n$
Б. $b_n = 3 \cdot 2^n$
В. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
Г. $b_n = 3 \cdot 2(n-1)$

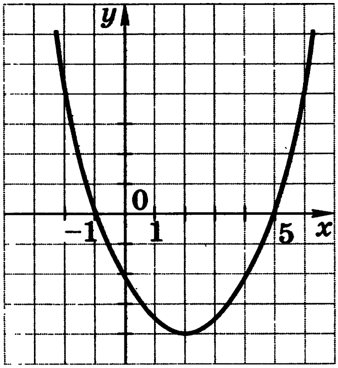
15 Какая из следующих прямых отсутствует на рисунке?

А. $y = 2x + 3$
Б. $y = 2x - 3$
В. $y = -2x + 3$
Г. $y = -2x - 3$



16 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Расположите в порядке возрастания числа

$$f(-2),\ f(2),\ f(5).$$



Ответ: ____________________

Работа № 7

Вариант 2

1 В таблице приведены результаты прохождения гонщиком шести кругов дистанции во время кольцевой автогонки.

Номер круга	I	II	III	IV	V	VI
Результат, с	90,03	89,59	90,30	89,41	88,90	90,17

На каком круге гонщик показал худший результат?

А. На I **Б.** На V **В.** На VI **Г.** На III

2 Средний вес девочек того же возраста, что и Маша, равен 36 кг. Вес Маши составляет 110% среднего веса. Сколько весит Маша?

А. 32,4 кг **Б.** 39,6 кг **В.** 36 кг **Г.** 3,6 кг

3 Какое из чисел является лучшим приближением числа $\sqrt{12}$?

А. 3 **Б.** 3,4 **В.** 3,6 **Г.** 4

4 Какое из чисел не входит в область определения выражения $\sqrt{x+2}$?

А. 2 **Б.** 0 **В.** −4 **Г.** −2

5 Расстояние s (в метрах), которое пролетает тело при свободном падении за время t (в секундах), можно приближенно вычислить по формуле $s = 5t^2$. За какое время камень, упавший с высоты 45 м, достигнет земли?

Ответ: ____________________

6 Преобразуйте в многочлен выражение

$$3a(a + 2) - (a + 3)^2.$$

Ответ: ____________________

7 Найдите значение выражения $(6 \cdot 10^3) \cdot (1{,}4 \cdot 10^{-6})$.

А. 8400

Б. 0,084

В. 0,0084

Г. 0,00084

8 Упростите выражение $\frac{y}{x^2 - y^2} \cdot (xy - y^2)$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $3(2 + 1{,}5x) = 0{,}5x + 24$.

А. $\frac{2}{9}$ Б. $\frac{1}{6}$ В. 3,6 Г. 4,5

10 От дома до школы Коля обычно едет на велосипеде со скоростью 10 км/ч. Чтобы приехать в школу раньше на $\frac{1}{4}$ ч, ему надо ехать со скоростью 12 км/ч. Чему равно расстояние от дома до школы?

Пусть x км — расстояние от дома до школы. Какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$

Б. $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = 15$

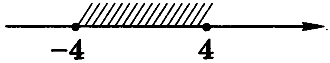
В. $\frac{x}{12} - \frac{x}{10} = \frac{1}{4}$

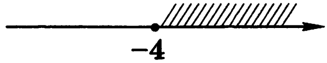
Г. $\frac{x}{12} - \frac{x}{10} = 15$

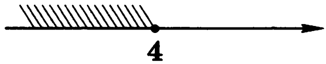
11 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 3y = 9 \\ x - y = 3. \end{cases}$

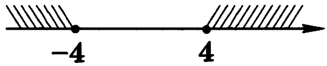
Ответ: ____________________

12 На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 16 \geqslant 0$?

А. 

В. 

Б. 

Г. 

13 Известно, что $x < y$. Из следующих неравенств выберите те, которые верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих этому условию:

1) $x - y > 0$; 3) $y - x > -7$;

2) $y - x < 1$; 4) $x - y < 2$.

А. 1) и 3) **В.** 3) и 4)

Б. 1) и 2) **Г.** 2) и 4)

14 Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{3}$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

А. $b_n = \frac{2n}{3}$ **В.** $b_n = \frac{2}{3^{n-1}}$

Б. $b_n = \frac{2}{3^n}$ **Г.** $b_n = 2 \cdot \frac{n-1}{3}$

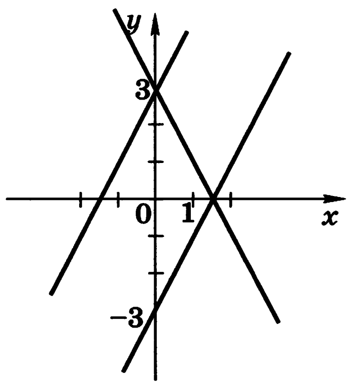
15 Какая из следующих прямых отсутствует на рисунке?

А. $y = 2x + 3$

Б. $y = 2x - 3$

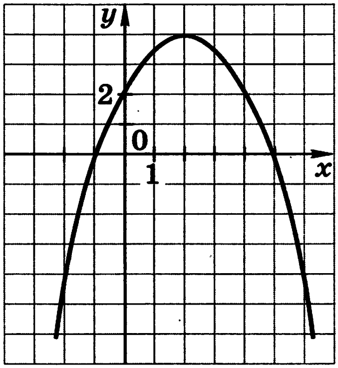
В. $y = -2x + 3$

Г. $y = -2x - 3$



16 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Расположите в порядке возрастания числа

$$f(-2),\ f(2) \text{ и } f(5).$$



Ответ: ____________________

Работа № 8

Вариант 1

1 Какое целое число заключено между числами

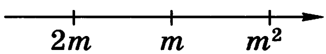
$$\sqrt{8} \text{ и } \sqrt{10}?$$

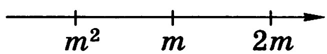
А. 2 **Б.** 3 **В.** 9 **Г.** Таких чисел нет

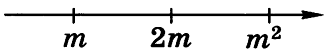
2 Некоторый товар поступил в продажу по цене 60 р. В соответствии с принятыми в магазине правилами цена непроданного товара каждую неделю снижается на 10%. Сколько будет стоить товар на 12-й день, если не будет куплен?

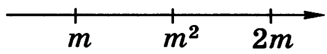
А. 6 р. **Б.** 48,5 р. **В.** 50 р. **Г.** 54 р.

3 Известно, что число m отрицательное. На каком из рисунков точки с координатами m, $2m$, m^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

А.


В.


Б.


Г.


4 Для вычисления тормозного пути автомобиля часто используется формула $s = \frac{40v + v^2}{200}$, где s — длина тормозного пути (в метрах), v – скорость (в километрах в час), с которой автомобиль ехал перед торможением. На сколько метров длиннее будет тормозной путь автомобиля при скорости 100 км/ч, чем при скорости 80 км/ч?

Ответ: ____________________

5 Даны выражения: 1) $\frac{x}{x-5}$; 2) $\frac{x-5}{x}$; 3) $\frac{x-\frac{1}{x}}{5}$. Какие из них не имеют смысла при $x = 0$?

А. Только 1 В. 2 и 3

Б. Только 2 Г. 1, 2 и 3

6 В выражение pq подставьте $p=\frac{a^2-b^2}{a^2}$, $q=\frac{a}{ab+b^2}$ и упростите полученное выражение.

Ответ: ____________________

7 Чему равно значение выражения $\frac{a^{-9}}{a^{-2}\,a^{-5}}$ при $a=\frac{1}{2}$?

А. -4 Б. $-\frac{1}{4}$ В. $\frac{1}{4}$ Г. 4

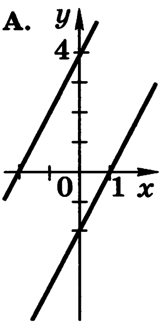
8 Найдите значение выражения $\sqrt{15\cdot 32\cdot 30}$.

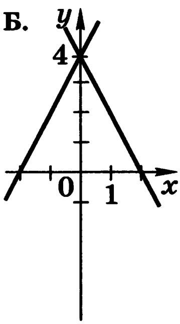
Ответ: ____________________

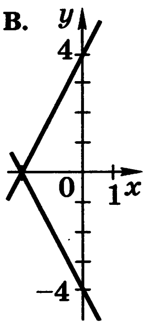
9 Решите уравнение $2x^2 - 8 = 0$.

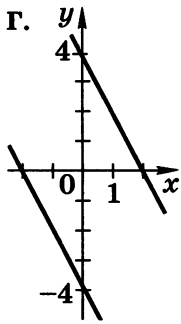
Ответ: ____________________

10 Укажите рисунок, на котором приведена графическая иллюстрация решения системы уравнений $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=2x+4. \end{cases}$

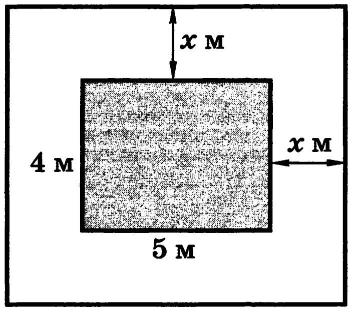
А.


Б.


В.


Г.


11 Детский бассейн прямоугольной формы со сторонами 4 м и 5 м обрамлен дорожкой одинаковой ширины (см. рисунок). Бассейн вместе с дорожкой занимает площадь, равную 56 м^2. Какова ширина дорожки? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена ширина дорожки.



А. $(4 + x)(5 + x) = 56$

Б. $4(5 + 2x) = 56$

В. $5(4 + 2x) = 56$

Г. $(4 + 2x)(5 + 2x) = 56$

12 Решите неравенство $6 - 3x < 19 - (x - 7)$.

Ответ: ____________________

13 Значение какого из данных выражений положительно, если известно, что $x > 0$, $y < 0$?

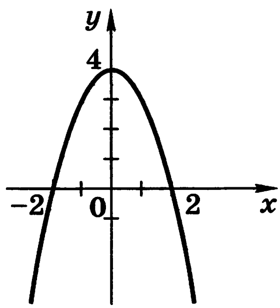
А. xy　　　　В. $(x - y)y$

Б. $(x - y)x$　　Г. $(y - x)x$

14 Последовательность задана формулой $c_n = n^2 - 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

А. 1　　Б. 2　　В. 3　　Г. 4

15 График какой из функций изображен на рисунке?



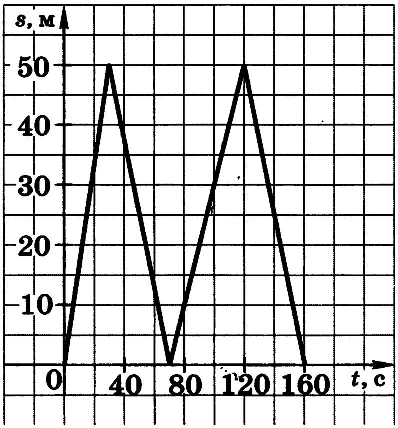
А. $y = x^2 - 2$

Б. $y = -x^2 + 2$

В. $y = x^2 + 4$

Г. $y = -x^2 + 4$

16 На тренировке в 50-метровом бассейне пловец проплыл 200-метровую дистанцию. На рисунке изображен график зависимости расстояния s (в метрах) между пловцом и точкой старта от времени t (в секундах) движения пловца. Определите, какое расстояние преодолел пловец за 1 мин 40 с.



А. 30 м Б. 120 м В. 130 м Г. 175 м

Работа № 8

Вариант 2

1 Какое целое число заключено между числами

$$\sqrt{15} \text{ и } \sqrt{17}?$$

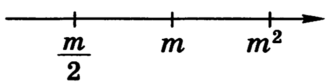
А. 3 Б. 4 В. 16 Г. Таких чисел нет

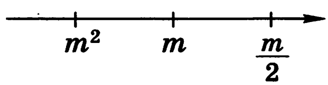
2 Некоторый товар поступил в продажу по цене 800 р. В соответствии с принятыми в магазине правилами цена нереализованного товара каждый месяц снижается на 10%. Сколько будет стоить товар на 50-й день, если не будет куплен?

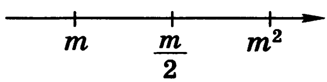
А. 720 р. В. 640 р.

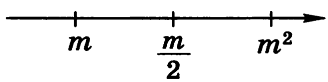
Б. 648 р. Г. 880 р.

3 Известно, что число m – отрицательное. На каком из рисунков точки с координатами m^2, $\frac{m}{2}$, m расположены на координатной прямой в правильном порядке?

А.


В.


Б.


Г.


4 Для вычисления тормозного пути автомобиля часто используется формула $s = \frac{40v + v^2}{200}$, где s — длина тормозного пути (в метрах), v — скорость (в километрах в час), с которой автомобиль ехал перед торможением. На сколько метров длиннее будет тормозной путь автомобиля при скорости 120 км/ч, чем при скорости 100 км/ч?

Ответ: ____________________

$\boxed{5}$ Даны выражения: 1) $\frac{x}{x-1}$; 2) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$. Какие из них не имеют смысла при $x = 1$?

А. 1 и 2 В. Только 1

Б. 1 и 3 Г. 1, 2 и 3

$\boxed{6}$ В выражение ab подставьте $a = \frac{x^2 - y^2}{2x}$, $b = \frac{2xy}{xy - y^2}$ и упростите полученное выражение.

Ответ: ____________________

$\boxed{7}$ Чему равно значение выражения $\frac{a^{-4}a^{-3}}{a^{-5}}$ при $a = \frac{1}{3}$?

А. -9 Б. $-\frac{1}{9}$ В. $\frac{1}{9}$ Г. 9

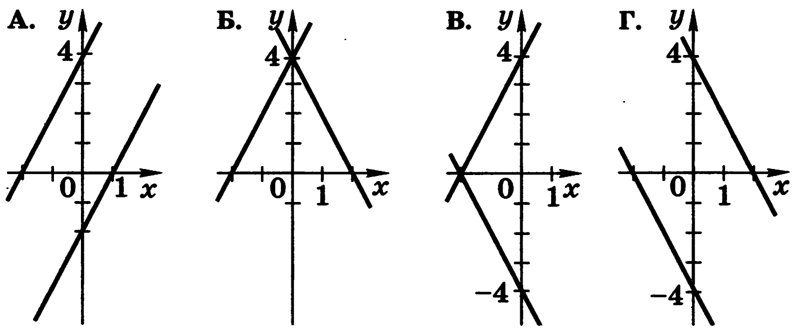
$\boxed{8}$ Найдите значение выражения $\sqrt{27 \cdot 6 \cdot 50}$.

Ответ: ____________________

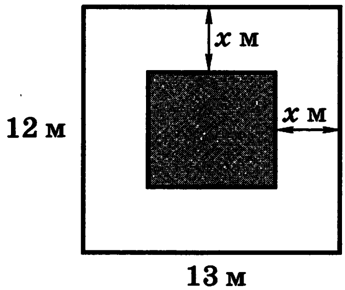
$\boxed{9}$ Решите уравнение $3x^2 - 27 = 0$.

Ответ: ____________________

$\boxed{10}$ Укажите рисунок, на котором приведена графическая иллюстрация решения системы уравнений $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2x + 4. \end{cases}$



11 В центре детской площадки прямоугольной формы со сторонами 12 м и 13 м расположена прямоугольная песочница. Площадь, не занятая песочницей, равна 130 м^2. Расстояния от ее бортика до границы площадки одинаковы (см. рисунок). Найдите это расстояние.
Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено расстояние от бортика песочницы до границы площадки.



А. $(12 - 2x)(13 - 2x) = 130$

Б. $156 - (12 - x)(13 - x) = 130$

В. $156 - (12 - 2x)(13 - 2x) = 130$

Г. $130 - 25 = 2(12 - 2x) + 2(13 - 2x)$

12 Решите неравенство $3(1 - x) - (2 - x) < 5$.

Ответ: ____________________

13 Значение какого из данных выражений положительно, если известно, что $x < 0$, $y > 0$?

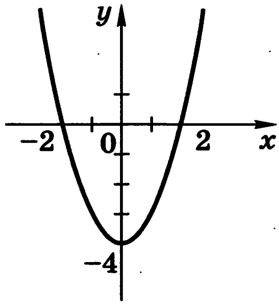
А. $(x - y)x$ В. $(x - y)y$

Б. xy Г. $(y - x)x$

14 Последовательность задана формулой $c_n = n^2 + 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

А. 4 Б. 6 В. 5 Г. 3

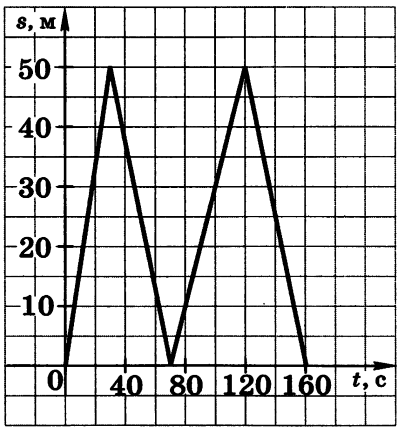
15 График какой из функций изображен на рисунке?



А. $y = x^2 - 2$ В. $y = x^2 - 4$

Б. $y = -x^2 + 2$ Г. $y = -x^2 + 4$

16 На тренировке в 50-метровом бассейне пловец проплыл 200-метровую дистанцию. На рисунке изображен график зависимости расстояния s (в метрах) между пловцом и точкой старта от времени t (в секундах) движения пловца. Определите, какое расстояние преодолел пловец за 2 мин 20 с.



А. 30 м Б. 120 м В. 130 м Г. 175 м

Работа № 9

Вариант 1

1 Земля находится на расстоянии 149 млн км от Солнца. Выразите это расстояние в километрах.

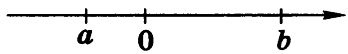
А. $1{,}49 \cdot 10^6$ км В. $1{,}49 \cdot 10^8$ км

Б. $1{,}49 \cdot 10^7$ км Г. $1{,}49 \cdot 10^9$ км

2 На какое из данных чисел делится произведение $123 \cdot 70$?

А. На 4 Б. На 6 В. На 9 Г. На 25

3 На координатной прямой отмечены числа a и b. Какое из следующих утверждений является верным?



А. $a + b > b$

Б. $a + b > a$

В. $ab > b$

Г. $a - b > b$

4 Найдите значение выражения $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ при $a = -\sqrt{2}$.

Ответ: ____________________

5 Перед Новым годом цены в магазине подарков были снижены на 25%. Некоторый товар до уценки стоил x р. Какова его цена?
Решая задачу, ученик записал четыре разных выражения для вычисления новой цены товара. Одно из них неверно. Какое?

А. $x - 0{,}25x$ В. $x - 25$

Б. $0{,}75x$ Г. $x - \frac{x}{4}$

$\boxed{6}$ Упростите выражение $\frac{1}{x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^{-4}}$ и найдите его значение при $x = -2$.

А. -32 Б. 32 В. $-\frac{1}{32}$ Г. $\frac{1}{32}$

$\boxed{7}$ Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)(\ \dots\ )?$$

Ответ: ____________________

$\boxed{8}$ Упростите выражение $\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{6a}\right) \cdot \frac{a^2}{4}$.

Ответ: ____________________

$\boxed{9}$ Решите уравнение $\frac{5}{1-x} = \frac{4}{3-x}$.

Ответ: ____________________

$\boxed{10}$ Под детскую площадку отведен участок прямоугольной формы, длина которого на 4 м больше ширины. Площадь участка 165 м^2. Найдите длину площадки.

Ответ: ____________________

$\boxed{11}$ Из данных уравнений подберите второе уравнение системы $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \dots \end{cases}$ так, чтобы она имела два решения.

(Используйте графические представления.)

А. $y = -x$

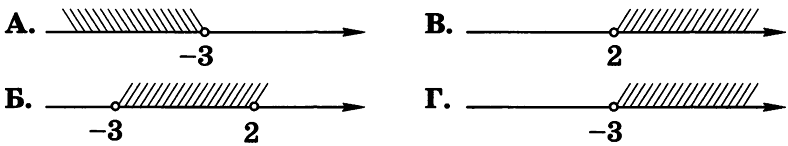
Б. $y = x$

В. $y = x^2$

Г. $y = -x^2$

12 На каком рисунке изображено множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+6 > 0 \\ 3-x > 1? \end{cases}$$



13 Какое из неравенств следует из неравенства $x > y - z$?

А. $x - y > z$ В. $z - x > y$

Б. $y > x + z$ Г. $z > y - x$

14 Из арифметических прогрессий выберите ту, среди членов которой есть число −10.

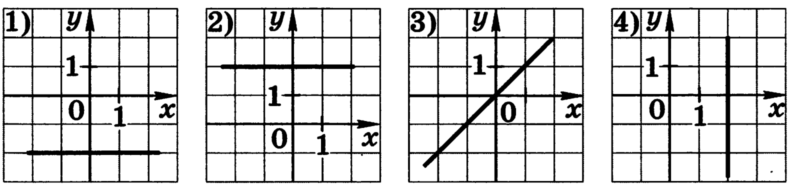
А. $a_n = 2n + 10$

Б. $a_n = -3n$

В. $a_n = -3n + 2$

Г. $a_n = -4n - 8$

15 Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с ее уравнением.

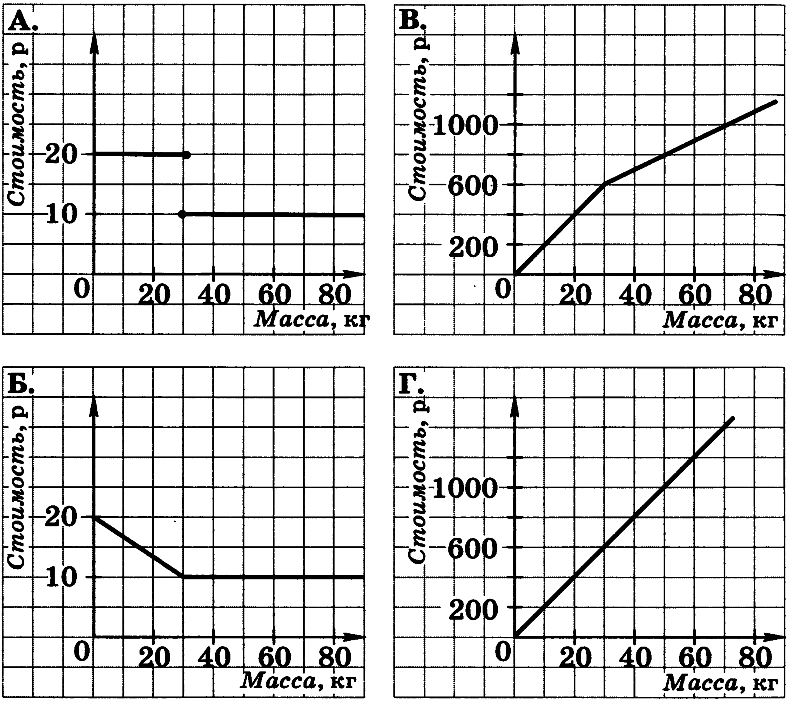


а) $y = x$ б) $x = 2$ в) $y = 2$ г) $y = -2$

Ответ:

1	2	3	4

16 В оптовом магазине сахарный песок продается на следующих условиях: первые 30 кг — по цене 20 р. за килограмм, а далее — по цене 10 р. за килограмм. Какой график соответствует этим условиям?



Работа № 9

Вариант 2

1. Марс находится на расстоянии 227 млн км от Солнца. Выразите это расстояние в километрах.

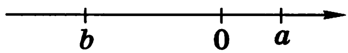
А. $2{,}27 \cdot 10^9$ км В. $2{,}27 \cdot 10^7$ км

Б. $2{,}27 \cdot 10^8$ км Г. $2{,}27 \cdot 10^6$ км

2. На какое из данных чисел делится произведение $122 \cdot 85$?

А. На 4 Б. На 25 В. На 9 Г. На 10

3. На координатной прямой отмечены числа a и b. Какое из следующих утверждений является верным?



А. $a + b < b$

Б. $a + b > a$

В. $ab > a$

Г. $a - b > b$

4. Найдите значение выражения $-\frac{4\sqrt{2}}{a^3}$ при $a = -\sqrt{2}$.

Ответ: ____________________

5. За год цены на бензин выросли на 20%. В начале года 1 л бензина марки А стоил x р. Какова новая цена бензина этой марки?
Решая задачу, ученик записал четыре разных выражения для вычисления новой цены бензина этой марки. Одно из них неверно. Какое?

А. $x + 0{,}2x$ В. $1{,}2x$

Б. $x + 20$ Г. $x+\frac{x}{5}$

6 Упростите выражение $\frac{1}{x^{-1}} : \frac{1}{x^{-4}}$ и найдите его значение при $x = 2$.

А. $-\frac{1}{8}$ Б. 8 В. $\frac{1}{8}$ Г. −8

7 Какое выражение надо поставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)(\ldots)?$$

Ответ: ____________________

8 Упростите выражение $\left(\frac{1}{5c} - \frac{1}{10c}\right) \cdot \frac{2c^2}{3}$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x-4}$.

Ответ: ____________________

10 Под сквер отведен участок земли прямоугольной формы, длина которого на 10 м больше ширины. Площадь участка 875 м^2. Найдите длину участка.

Ответ: ____________________

11 Из данных уравнений подберите второе уравнение системы $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \ldots \end{cases}$ так, чтобы она не имела решений.

(Используйте графические представления.)

А. $y = -x$

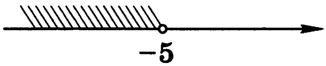
Б. $y = x$

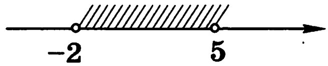
В. $y = x^2$

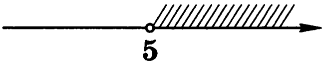
Г. $y = -x^2$

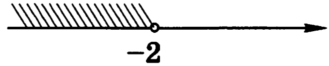
12 На каком рисунке изображено множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+4 > 0 \\ 15-3x > 0? \end{cases}$$

А. 

В. 

Б. 

Г. 

13 Какое из неравенств следует из неравенства $x - y > z$?

А. $z - x + y < 0$ В. $z + y > x$

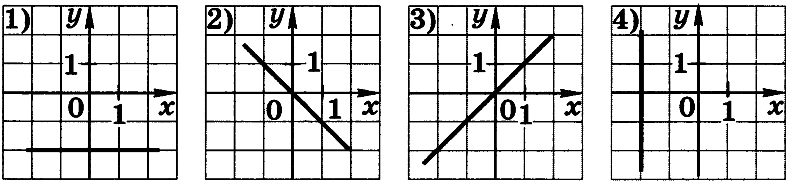
Б. $y > x - z$ Г. $x - y - z < 0$

14 Из заданных геометрических прогрессий выберите ту, среди членов которой есть число 9.

А. $a_n = -3^n$ В. $3 \cdot 2^{n-1}$

Б. $a_n = 3^n$ Г. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

15 Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с ее уравнением.

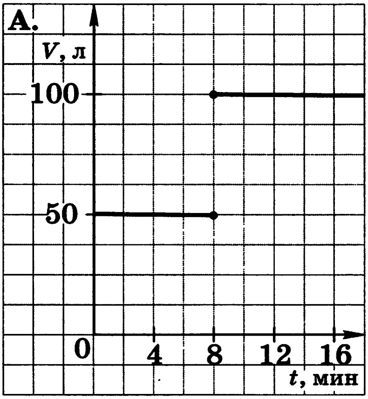


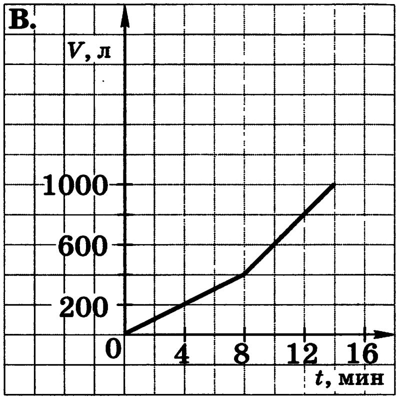
а) $y = -x$ б) $x = -2$ в) $y = x$ г) $y = -2$

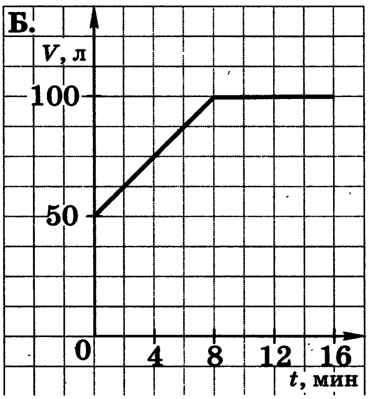
Ответ:

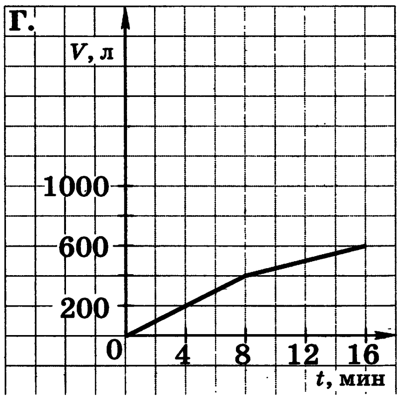
1	2	3	4

16 Для наполнения бассейна водой сначала был открыт один кран, через который вода поступала в бассейн со скоростью 50 л в минуту. Через 8 мин был открыт еще один такой же кран. Какой график описывает процесс наполнения бассейна водой? (По горизонтальной оси откладывается время t наполнения бассейна, по вертикальной — объем V воды в бассейне.)









Работа № 10

Вариант 1

1 Укажите число, равное $5{,}6 \cdot 10^{-4}$.

А. 0,000056 В. 0,0056

Б. 0,00056 Г. 0,056

2 В танцевальной студии число девочек относится к числу мальчиков как 6 : 5. Сколько пар, в каждую из которых входят мальчик и девочка, могут одновременно танцевать, если всего в студии занимается 66 человек?

А. 36 Б. 33 В. 30 Г. 5

3 Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5.

А. $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; 5,5 В. 5,5; $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$

Б. $\sqrt{30}$; 5,5; $3\sqrt{3}$ Г. $3\sqrt{3}$; $\sqrt{30}$; 5,5

4 Найдите значение выражения $1 - 7y + 30y^2$ при $y = -0{,}1$.

Ответ: ____________________

5 На счет в банке, доход по которому составляет 20% годовых, внесли a р. Какая сумма будет на счету через год?

А. $(a + 0{,}2a)$ р. В. $0{,}2a$ р.

Б. $(a + 20a)$ р. Г. $(a + 20)$ р.

6 Разложите на множители квадратный трехчлен

$$x^2 + 2x - 3.$$

Ответ: ____________________

$\boxed{7}$ **В выражение $a - b$ подставьте $a = \frac{x+y}{x-y}$ и $b = \frac{x-y}{x+y}$ и упростите его.**

Ответ: ____________________

$\boxed{8}$ **Представьте в виде степени произведение $4 \cdot 2^n$.**

А. 4^{n+2} **Б.** 8^n **В.** 2^{2n} **Г.** 2^{n+2}

$\boxed{9}$ **Найдите корни уравнения $\frac{(x-2)(x+3)}{x-3} = 0$.**

А. 2 **Б.** 3 **В.** 2; −3 **Г.** 2; 3; −3

$\boxed{10}$ **В коллекции 85 марок. Из них марок на спортивную тему на 20 больше, чем на тему «Фауна», и в 3 раза меньше, чем на тему «Автомобили». Сколько в коллекции марок на спортивную тему?**

Пусть x — количество марок на спортивную тему. Какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $x+(x-20)+\frac{x}{3}=85$

Б. $x+(x+20)+\frac{x}{3}=85$

В. $x + (x + 20) + 3x = 85$

Г. $x + (x - 20) + 3x = 85$

$\boxed{11}$ **Решите систему уравнений** $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+2y=0. \end{cases}$

Ответ: ____________________

$\boxed{12}$ **Какое из неравенств верно при любом значении x?**

А. $x^2 - 1 > 0$

Б. $x^2 + 1 > 0$

В. $x^2 - 1 < 0$

Г. $x^2 + 1 < 0$

13 Известно, что a и b – положительные числа и $a > b$. Какое из утверждений неверно?

А. $-a < -b$

Б. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

В. $a^2 > b^2$

Г. $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

14 Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Укажите ее.

А. $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$

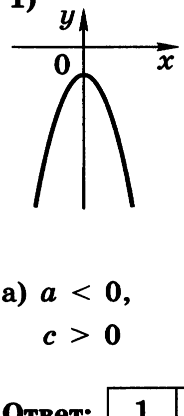
Б. $1; 3; 5; 7; \ldots$

В. $1; 2; 4; 8; \ldots$

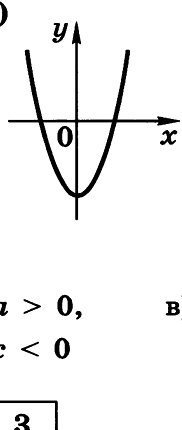
Г. $1; 2; 3; 5; \ldots$

15 На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a и c.

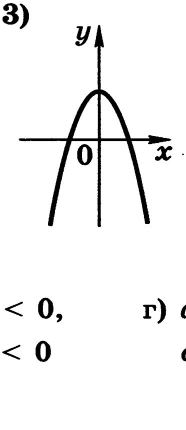
1)



2)



3)



а) $a < 0$, $c > 0$

б) $a > 0$, $c < 0$

в) $a < 0$, $c < 0$

г) $a > 0$ $c > 0$

Ответ:

1	2	3

16 Из полного бака, вместимость которого 100 л, через открытый кран вытекает вода со скоростью 5 л в минуту. Количество воды y (л), остающейся в баке, является функцией времени x (мин), в течение которого вытекает вода. Задайте эту функцию формулой.

А. $y = 100 - 5x$ **В.** $y = 5x - 100$

Б. $y = 5x$ **Г.** $y = 100 - \frac{5}{x}$

Работа № 10

Вариант 2

1 Укажите число, равное $1{,}9 \cdot 10^{-5}$.

А. 0,0019 **В.** 0,000019

Б. 0,00019 **Г.** 0,0000019

2 В секции акробатики число девочек относится к числу мальчиков как 2 : 5. Сколько троек, в каждую из которых входят одна девочка и два мальчика, могут одновременно выступать, если всего в секции занимается 28 человек?

А. 4 **Б.** 8 **В.** 9 **Г.** 10

3 Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{45}$; $4\sqrt{3}$; 6,5.

А. 6,5; $4\sqrt{3}$; $\sqrt{45}$ **В.** $\sqrt{45}$; $4\sqrt{3}$; 6,5

Б. $4\sqrt{3}$; 6,5; $\sqrt{45}$ **Г.** 6,5; $\sqrt{45}$; $4\sqrt{3}$

4 Найдите значение выражения $1 - 10y + 5y^2$ при $y = -0{,}2$.

Ответ: ____________________

5 При получении денег через банкомат банк удерживает 3% от снятой суммы. Сколько всего денег будет снято со счета клиента, если он получает через банкомат a р.?

А. $(a - 0{,}03a)$ р. **В.** $0{,}03a$ р.

Б. $(a + 0{,}03a)$ р. **Г.** a р.

6 Разложите на множители квадратный трехчлен

$$x^2 + 3x - 10.$$

Ответ: ____________________

7 В выражение $a - b$ подставьте $a = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ и $b = \frac{x - y}{x + y}$ и упростите его.

Ответ: ____________________

8 Представьте в виде степени произведение $9 \cdot 3^k$.

А. 3^{k+2} **Б.** 27^k **В.** 3^{2k} **Г.** 9^{k+3}

9 Найдите корни уравнения $\frac{(x-3)(x+2)}{x-2} = 0$.

А. 2 **Б.** 3 **В.** −2; 3 **Г.** 2; 3; −2

10 В книге 84 страницы. Во второй день каникул Саша прочитал в 2 раза больше страниц, чем в первый, а в третий — на 4 страницы меньше, чем во второй. Сколько страниц прочитал Саша в каждый из этих дней?

Пусть x — количество страниц, прочитанных в первый день. Какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $x + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} + 4\right) = 84$

Б. $x + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 4\right) = 84$

В. $x + 2x + (2x - 4) = 84$

Г. $x + 2x + (2x + 4) = 84$

11 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0. \end{cases}$

Ответ: ____________________

12 Какое из неравенств не имеет решений?

А. $x^2 - 1 > 0$ **В.** $x^2 - 1 < 0$

Б. $x^2 + 1 > 0$ **Г.** $x^2 + 1 < 0$

13 Известно, что x и y — положительные числа и $x < y$. Какое из утверждений неверно?

А. $-x > -y$

Б. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

В. $x^2 < y^2$

Г. $\sqrt{x} > \sqrt{y}$

14 Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите ее.

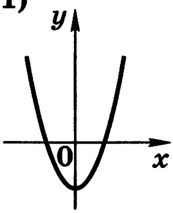
А. 1; 4; 9; 16; ...

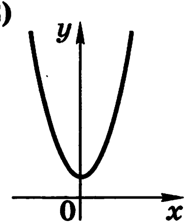
Б. 2; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; ...

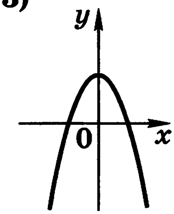
В. 1; 3; 9; 27; ...

Г. 2; 4; 6; 8; ...

15 На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a и c.

1) 

2) 

3) 

а) $a > 0$, $c > 0$

б) $a < 0$, $c > 0$

в) $a < 0$, $c < 0$

г) $a > 0$ $c < 0$

Ответ:

1	2	3

16 Количество бензина в баке автомобиля, вместимость которого 40 л, уменьшается на 1 л за 10 км пути. Количество бензина y (л), остающегося в баке, является функцией расстояния x (км), пройденного автомобилем. Задайте эту функцию формулой.

А. $y = 40 - \frac{x}{10}$ **В.** $y = 40 - 10x$

Б. $y = 10x + 40$ **Г.** $y = 40 - \frac{10}{x}$

Работа № 11

Вариант 1

1 Укажите наименьшее из следующих чисел:
0,7; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{4}{5}$.

А. 0,7 Б. $\frac{7}{9}$ В. $\frac{9}{7}$ Г. $\frac{4}{5}$

2 Товар на распродаже уценили на 20%, при этом он стал стоить 680 р. Сколько стоил товар до распродажи?

А. 136 р. В. 700 р.
Б. 816 р. Г. 850 р.

3 Найдите значение выражения $\frac{a+x}{a-x}$ при $a = -0{,}7$ и $x = -0{,}3$.

Ответ: ____________________

4 Из формулы $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ выразите переменную b.

А. $b=\frac{ac}{a+c}$ В. $b=\frac{a-c}{ac}$
Б. $b=\frac{ac}{c-a}$ Г. $b=\frac{ac}{a-c}$

5 При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{-2x}$?

А. При $x \geqslant 0$ В. Ни при каких x
Б. При $x \leqslant 0$ Г. При любых x

6 Упростите выражение $(c + 2)(c - 3) - (c - 1)^2$.

А. $c - 7$ В. $c + 5$
Б. $c - 5$ Г. $-3c - 7$

7 Упростите выражение $\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} \cdot \sqrt{21}$.

Ответ: ____________________

8 Укажите выражение, равное степени 2^{k-3}.

А. $2^k - 2^3$ Б. $\frac{2^k}{2^3}$ В. $\frac{2^k}{2^{-3}}$ Г. $(2^k)^{-3}$

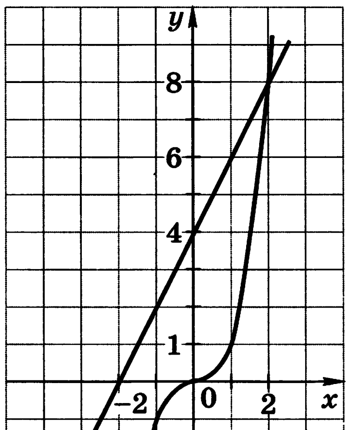
9 Решите уравнение $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$.

Ответ: ____________________

10 В 2 большие и 3 маленькие коробки помещается 38 карандашей, а в 3 большие и 2 маленькие коробки — 42 карандаша. Сколько карандашей в большой и маленькой коробках вместе?

Ответ: ____________________

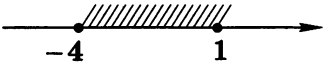
11 Используя графики функций $y = x^3$ и $y = 2x + 4$, решите уравнение $x^3 - 2x - 4 = 0$.

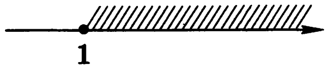


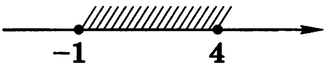
Ответ: ____________________

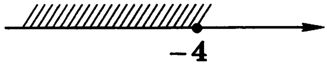
12 Для каждой системы неравенств укажите номер рисунка, на котором изображено множество ее решений.

1) $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ 4 - x \geqslant 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x+4 \leqslant 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1-x \leqslant 0 \\ x \geqslant -4 \end{cases}$

а) 

в) 

б) 

г) 

Ответ:

1	2	3

13 О числах p и q известно, что $p > q$. Какое из следующих неравенств неверно?

А. $6 + p > 6 + q$ **В.** $1 - p < 1 - q$

Б. $\frac{p}{3} < \frac{q}{3}$ **Г.** $-\frac{p}{5} < -\frac{q}{5}$

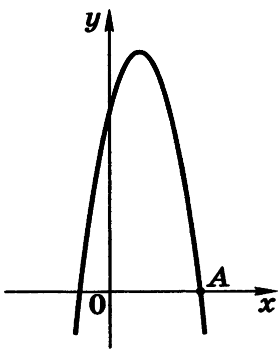
14 Последовательность задана формулой $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из чисел не является членом этой последовательности?

А. $\frac{1}{2}$ **Б.** $\frac{1}{4}$ **В.** $\frac{1}{5}$ **Г.** $\frac{1}{6}$

15 На рисунке изображен график функции

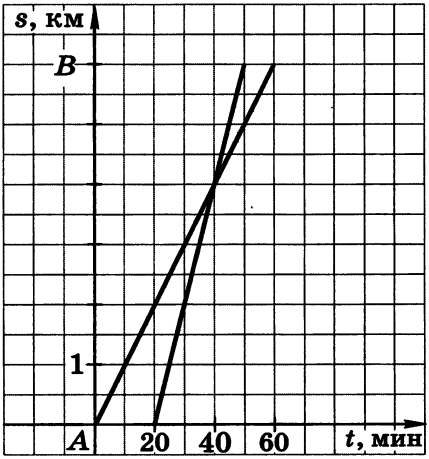
$$y = -2x^2 + 4x + 6.$$

Вычислите координаты точки A.



Ответ: ____________________

16 Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и через некоторое время вслед за ним выехал велосипедист. На рисунке изображены графики движения пешехода и велосипедиста. Определите, на сколько больше времени затратил на путь из A в B пешеход, чем велосипедист.



А. На 10 мин   В. На 50 мин

Б. На 30 мин   Г. На 20 мин

Работа № 11

Вариант 2

1 Укажите наименьшее из следующих чисел:
$0{,}8;\ \frac{8}{9};\ \frac{9}{8};\ \frac{3}{5}$.

А. $0{,}8$ **Б.** $\frac{8}{9}$ **В.** $\frac{9}{8}$ **Г.** $\frac{3}{5}$

2 Цену на товар повысили на 30%, при этом он стал стоить 780 р. Сколько стоил товар до подорожания?

А. 234 р. **В.** 1014 р.

Б. 2600 р. **Г.** 600 р.

3 Найдите значение выражения $\frac{a-x}{a+x}$ при $a = -0{,}4$ и $x = -0{,}5$.

Ответ: ____________________

4 Из формулы $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ выразите переменную a.

А. $a=\frac{bc}{b+c}$ **В.** $a=\frac{b+c}{bc}$

Б. $a=\frac{bc}{c-b}$ **Г.** $a=\frac{bc}{b-c}$

5 При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{1-x}$?

А. При $x \geqslant 1$ **В.** Ни при каких x

Б. При $x \leqslant 1$ **Г.** При любых x

6 Упростите выражение $(a-1)^2-(a+1)(a-2)$.

А. $-3a-1$ **В.** $3a+1$

Б. $3-a$ **Г.** $a+1$

7 Упростите выражение $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{15}$.

Ответ: ____________________

8 Укажите выражение, равное степени 2^{5-k}.

А. $2^5 - 2^k$ Б. $\frac{2^5}{2^k}$ В. $\frac{2^5}{2^{-k}}$ Г. $2^5 - k$

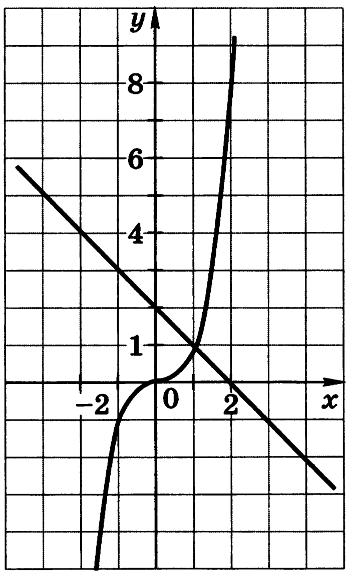
9 Решите уравнение $\frac{1}{4}x^2 - 16 = 0$.

Ответ: ____________________

10 Букет из трех тюльпанов и двух нарциссов стоит 80 р., а букет из двух тюльпанов и трех нарциссов — 70 р. Сколько стоят один тюльпан и один нарцисс вместе?

Ответ: ____________________

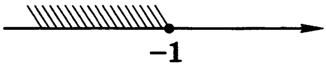
11 Используя графики функций $y = x^3$ и $y = -x + 2$, решите уравнение $x^3 + x - 2 = 0$.

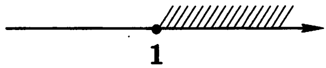


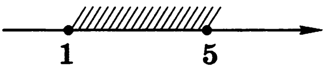
Ответ: ____________________

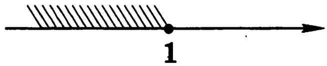
12 Для каждой системы неравенств укажите номер рисунка, на котором изображено множество ее решений.

1) $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x+5 \geqslant 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant -1 \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1-x \leqslant 0 \\ x \leqslant 5 \end{cases}$

а) 

в) 

б) 

г) 

Ответ:

1	2	3

13 О числах a и b известно, что $a < b$. Какое из следующих неравенств неверно?

А. $a - 3 < b - 3$ **В.** $\frac{1}{4}a < \frac{1}{4}b$

Б. $5 - a > 5 - b$ **Г.** $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2}$

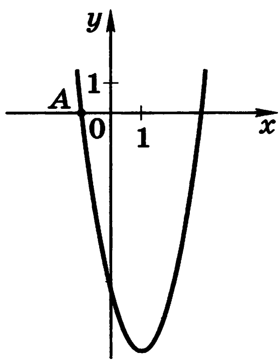
14 Последовательность задана формулой $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из чисел не является членом этой последовательности?

А. -1 **Б.** $-\frac{1}{3}$ **В.** $-\frac{1}{5}$ **Г.** $-\frac{1}{6}$

15 На рисунке изображен график функции

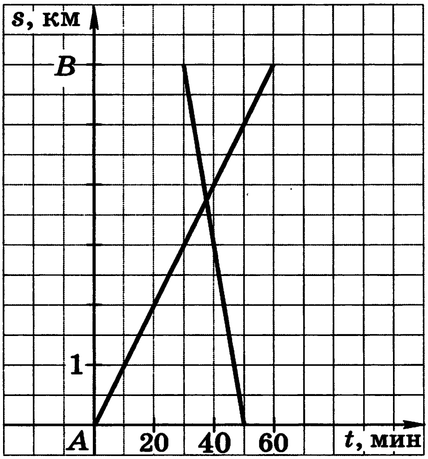
$$y = 2x^2 - 4x - 6.$$

Вычислите координаты точки A.



Ответ: ____________________

16 Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и через некоторое время навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Используя графики движения пешехода и велосипедиста, определите, на сколько меньше времени ушло на весь путь у велосипедиста, чем у пешехода.



А. На 10 мин

Б. На 30 мин

В. На 40 мин

Г. На 60 мин

Работа № 12

Вариант 1

1 Для каждого выражения из верхней строки укажите равное ему выражение из нижней.

1) $(a^2)^3a^2$ 2) $(a^2a^3)^2$ 3) $\frac{(a^3)^3}{a^2}$

а) a^{12} б) a^{10} в) a^8 г) a^7

Ответ:

1	2	3

2 Упростите выражение $4y(y - 4) - (y - 8)^2$.

Ответ: ____________________

3 Сократите дробь $\frac{a^2-4}{4a^2-8a}$.

Ответ: ____________________

4 При каком значении x значение выражения $\sqrt{3-2x}$ является числом рациональным?

А. При $x = 6$

Б. При $x = 0$

В. При $x = -2$

Г. При $x = -3$

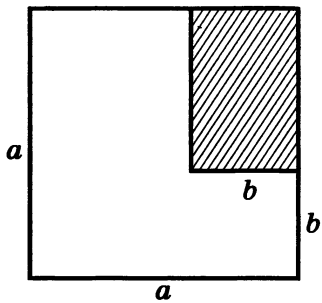
5 В спортивном зале выделили помещение для раздевалки (на рисунке оно показано штриховкой). Какова площадь S оставшейся части зала?

А. $S = a^2 + ab + b^2$

Б. $S = a^2 + ab - b^2$

В. $S = a^2 - ab - b^2$

Г. $S = a^2 - ab + b^2$



6 Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{2}$, 2, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2}$.

А. $\frac{1}{2}$, 2, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2}$

В. $\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2}$, 2

Б. $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, 2

Г. $\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, 2, $\sqrt{2}$

7 Какое из указанных чисел не делится на 3?

А. 12852 Б. 1143 В. 20293 Г. 7239

8 В начале года число абонентов интернет-компании «Север» составляло 200 тыс. человек. В течение года к ней присоединилось 50 тыс. новых абонентов, а 60 тыс. абонентов перешли в другую компанию. На сколько процентов уменьшилось за год число абонентов интернет-компании «Север»?

А. На 5% Б. На 1% В. На 24% Г. На 30%

9 Решите уравнение $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Ответ: ____________________

10 От одного города до другого автобус доехал за 3 ч, а автомобиль — за 2 ч. Скорость автомобиля на 25 км/ч больше скорости автобуса. Чему равно расстояние между городами?

Ответ: ____________________

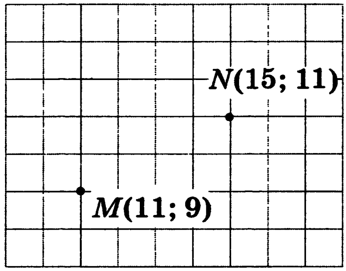
11 На рисунке изображены точки M и N координатной плоскости. Какое уравнение задает прямую MN?

А. $x - y = 4$

Б. $x + y = 20$

В. $x - 2y = -7$

Г. $2x - y = 13$



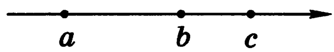
12 Решите неравенство $3 - x \geqslant 3x + 5$.

Ответ: ____________________

13 На координатной прямой отмечены числа a, b и c. Какая из следующих разностей отрицательна?

А. $b - a$ В. $c - a$

Б. $b - c$ Г. $c - b$



14 Последовательность задана формулой $a_n = \frac{10}{n+1}$. Сколько членов этой последовательности больше 1?

А. 10 Б. 9 В. 8 Г. 7

15 Функции заданы формулами:

1) $y = x^2 + 1$ 3) $y = -x^2 + 1$

2) $y = x^2 - 1$ 4) $y = -x^2 - 1$.

Графики каких из этих функций не пересекают ось x?

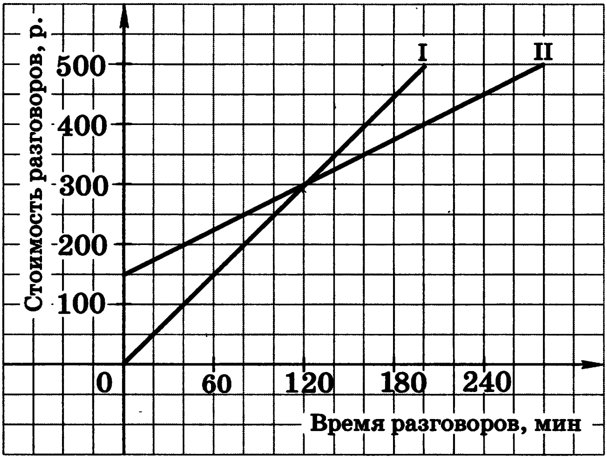
А. 1 и 4

Б. 2 и 4

В. 1 и 3

Г. 2 и 3

16 Телефонная компания предлагает на выбор две разные схемы начисления ежемесячной платы за разговоры:
схема I — без первоначального взноса;
схема II — с первоначальным взносом, но с меньшей стоимостью минуты разговора.
Для наглядности эти схемы изображены графически. При каких планируемых ежемесячных расходах на телефонные разговоры выгоднее воспользоваться схемой II?



А. 250 р. В. 300 р.
Б. 200 р. Г. 400 р.

Работа № 12

Вариант 2

1 Для каждого выражения из верхней строки укажите равное ему выражение из нижней.

1) $(c^4c^2)^2$ 2) $(c^3)^2c^4$ 3) $\left(\frac{c^6}{c^2}\right)^2$

а) c^6 б) c^8 в) c^{10} г) c^{12}

Ответ:

1	2	3

2 Упростите выражение $4b(b + 2) - (4 + b)^2$.

Ответ: ____________________

3 Сократите дробь $\frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 16}$.

Ответ: ____________________

4 При каком значении x значение выражения $\sqrt{2x-7}$ является числом иррациональным?

А. При $x = 0$

Б. При $x = 4$

В. При $x = 6$

Г. При $x = 8$

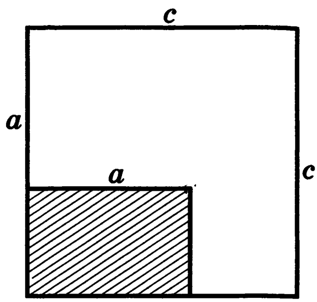
5 В гараже выделили помещение для мойки машин (на рисунке оно показано штриховкой). Какова площадь S оставшейся части гаража?

А. $S = c^2 + ac - a^2$

Б. $S = c^2 - ac + a^2$

В. $S = c^2 + ac + a^2$

Г. $S = c^2 - ac - a^2$



6 Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{3}$, 3, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3}$.

А. $\frac{1}{3}$, 3, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3}$

Б. 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$

В. $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3}$, 3

Г. 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{3}$

7 Какое из указанных чисел не делится на 9?

А. 81 234 Б. 8883 В. 30 159 Г. 3219

8 В начале года в городской библиотеке было 50 тыс. книг. К концу года 10 тыс. книг списали и купили 16 тыс. новых. На сколько процентов увеличился за год библиотечный фонд?

А. На 6%

Б. На 12%

В. На 28%

Г. На 40%

9 Решите уравнение $3x^2 + 8x - 3 = 0$.

Ответ: ____________________

10 От одного города до другого пассажирский автобус доехал за 3 ч, а грузовой автомобиль — за 4 ч. Скорость автобуса на 20 км/ч больше скорости грузового автомобиля. Чему равно расстояние между городами?

Ответ: ____________________

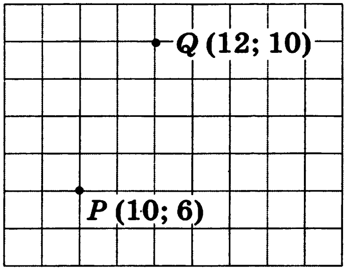
$\boxed{11}$ На рисунке изображены точки P и Q координатной плоскости. Какое уравнение задает прямую PQ?

А. $x + y = 16$

Б. $x - y = 2$

В. $x - 2y = -2$

Г. $2x - y = 14$



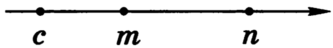
$\boxed{12}$ Решите неравенство $x - 1 < 3x + 2$.

Ответ: ____________________

$\boxed{13}$ На координатной прямой отмечены числа c, m и n. Какая из следующих разностей отрицательна?

А. $n - m$ В. $n - c$

Б. $m - c$ Г. $c - m$



$\boxed{14}$ Последовательность задана формулой $a_n = \frac{n+1}{11}$. Сколько членов этой последовательности меньше 1?

А. 8 Б. 9 В. 10 Г. 11

$\boxed{15}$ Функции заданы формулами:

1) $y = x^2 - 1$ 3) $y = -x^2 - 1$

2) $y = x^2 + 1$ 4) $y = -x^2 + 1$

Графики каких из этих функций пересекают ось x?

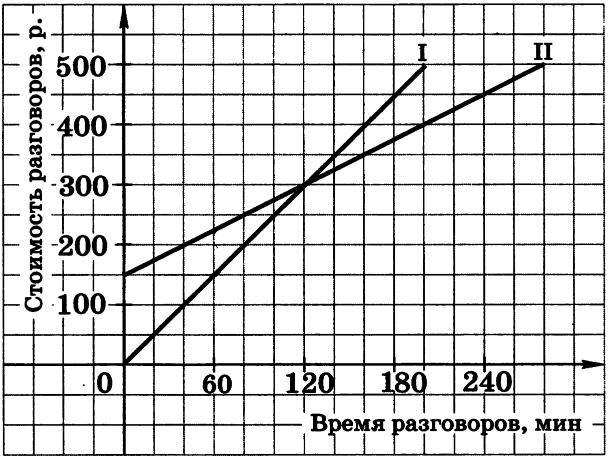
А. 2 и 3

Б. 3 и 4

В. 1 и 4

Г. 1 и 2

16 Телефонная компания предлагает на выбор две разные схемы начисления ежемесячной платы за разговоры:
схема I — без первоначального взноса;
схема II — с первоначальным взносом, но с меньшей стоимостью минуты разговора.
При какой длительности телефонных разговоров в месяц выгоднее воспользоваться схемой I?



А. 120 мин
В. 60 мин
Б. 180 мин
Г. 200 мин

Ответы к разделу I

Работа № 1

Вариант 1. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. В. 5. Б. 6. А. 7. Г. 8. $\frac{a}{3-a}$. 9. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. 10. (−3; 2). 11. А. 12. Б. 13. $x < -2$ или $x > 3$. 14. В. 15. 1) → г); 2) → в); 3) → а); 4) → б). 16. А.

Вариант 2. 1. Б. 2. В. 3. А. 4. Б. 5. В. 6. Г. 7. В. 8. $\frac{3a}{a+2}$. 9. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. 10. (5; 2). 11. А. 12. Г. 13. $-3 < x < 2$. 14. Б. 15. 1) → б); 2) → в); 3) → а); 4) → г). 16. А.

Работа № 2

Вариант 1. 1. −1,6. 2. $t_2 = t_1 + \frac{Q}{cm}$. 3. Б. 4. А. 5. В. 6. В. 7. Г. 8. $\frac{10a}{3a-2}$. 9. 4,5. 10. А. 11. Б. 12. А. 13. $-4 \leqslant x \leqslant 2$. 14. Г. 15. 1) → б); 2) → в); 3) → а). 16. В.

Вариант 2. 1. 1,6. 2. $t_1 = t_2 - \frac{Q}{cm}$. 3. А. 4. Б. 5. Г. 6. Б. 7. Б. 8. $\frac{16x}{x-8}$. 9. −0,25. 10. В. 11. А. 12. В. 13. $x \leqslant -4$ или $x \geqslant 1$. 14. Г. 15. 1) → в); 2) → а); 3) → б). 16. Б.

Работа № 3

Вариант 1. 1. В. 2. В. 3. P, M, Q. 4. 14 м. 5. В. 6. $\frac{a-b}{ab}$. 7. А. 8. $4-2\sqrt{3}$. 9. $x = -12$. 10. Г. 11. Б. 12. Г. 13. Г. 14. Б. 15. Г. 16. 4,5 км/ч.

Вариант 2. 1. Б. 2. Б. 3. Q, M, N. 4. На 4 м. 5. А. 6. $\frac{a-b}{ab}$. 7. Б. 8. 4. 9. $x = -10$. 10. Г. 11. А. 12. А. 13. Г. 14. В. 15. В. 16. 20 км/ч.

Работа № 4

Вариант 1. 1. $-\frac{1}{6}$. 2. А. 3. В. 4. Б. 5. А. 6. А. 7. $3a^2 + 3$. 8. А. 9. $x_1 = 1$, $x_2 = -2{,}5$. 10. $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=4. \end{cases}$ 11. Г. 12. В. 13. $-2 \leqslant x \leqslant 2$. 14. Б. 15. 1) → б); 2) → г); 3) → а); 4) → в). 16. Б.

Вариант 2. 1. $\frac{1}{6}$. 2. Б. 3. Б. 4. А. 5. В. 6. Г. 7. $4x^2 + 4$. 8. В. 9. $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -1$. 10. (1; 3). 11. А. 12. Г. 13. $x \leqslant 1$ или $x \geqslant 1$. 14. А. 15. 1) → в); 2) → г); 3) → а); 4) → б). 16. Б.

Работа № 5

Вариант 1. **1.** $2\frac{7}{8}$. **2.** Г. **3.** Г. **4.** А. **5.** В. **6.** $\frac{6y}{x+y}$. **7.** Б. **8.** А. **9.** 1) → б); 2) → в); 3) → г); 4) → а). **10.** В. **11.** (2; –3), (–2; 5). **12.** В. **13.** А. **14.** Б. **15.** Г. **16.** 10 м.

Вариант 2. **1.** $\frac{7}{8}$. **2.** Б. **3.** В. **4.** А. **5.** Г. **6.** $\frac{x+y}{3x}$. **7.** Б. **8.** Г. **9.** 1) → в); 2) → г); 3) → б); 4) → а). **10.** Г. **11.** (2; 3), (–2; –5). **12.** Б. **13.** Г. **14.** В. **15.** Б. **16.** 7 м.

Работа № 6

Вариант 1. **1.** 13. **2.** А. **3.** Б. **4.** В. **5.** 1) → в); 2) → а); 3) → г); 4) → б). **6.** Б. **7.** $\frac{a+2}{a^2}$. **8.** a^{-2}. **9.** Г. **10.** Г. **11.** В. **12.** А. **13.** $-2 \leqslant x \leqslant 0$. **14.** Б. **15** А. **16.** Иван, на 30 мин.

Вариант 2. **1.** 8. **2.** В. **3.** Б. **4.** Б. **5.** 1) → б); 2) → в); 3) → а); 4) → г). **6.** Г. **7.** $\frac{x+3}{x-3}$. **8.** a^{-3}. **9.** Г. **10.** Б. **11.** А. **12.** В. **13.** $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 3$. **14.** В. **15.** Г. **16.** Иван, на 6 км.

Работа № 7

Вариант 1. **1.** Б. **2.** Б. **3.** В. **4.** Г. **5.** $4c$. **6.** $3c^2 - 16$. **7.** В. **8.** $\frac{xy}{x+y}$. **9.** Г. **10.** А. **11.** (0; 3), (–3; 6). **12.** А. **13.** В. **14.** Б. **15.** В. **16.** $f(2)$; $f(5)$; $f(-2)$.

Вариант 2. **1.** Г. **2.** Б. **3.** Б. **4.** В. **5.** $3c$. **6.** $2a^2 - 9$. **7.** В. **8.** $\frac{y^2}{x+y}$. **9.** Г. **10.** А. **11.** (0; –3), (3; 0). **12.** Г. **13.** В. **14.** А. **15.** Г. **16.** $f(-2)$; $f(5)$; $f(2)$.

Работа № 8

Вариант 1. **1.** Б. **2.** Г. **3.** А. **4.** На 22 м. **5.** В. **6.** $\frac{a-b}{ab}$. **7.** Г. **8.** 120. **9.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. **10.** А. **11.** Г. **12.** $x > -10$. **13.** Б. **14.** В. **15.** Г. **16.** В.

Вариант 2. **1.** Б. **2.** А. **3.** Б. **4.** На 26 м. **5.** Б. **6.** $x + y$. **7.** Г. **8.** 90. **9.** $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. **10.** Б. **11.** В. **12.** $x > 2$. **13.** А. **14.** В. **15.** В. **16.** Г.

Работа № 9

Вариант 1. **1.** В. **2.** Б. **3.** Б. **4.** –1. **5.** В. **6.** А. **7.** $x - \frac{1}{2}$. **8.** $\frac{a}{6}$. **9.** $x = 11$. **10.** 15 м. **11.** Б. **12.** Б. **13.** Г. **14.** В. **15.** 1) → г); 2) → в); 3) → а); 4) → б). **16.** В.

Вариант 2. **1.** Б. **2.** Г. **3.** Г. **4.** 2. **5.** Б. **6.** В. **7.** $x - \frac{1}{3}$. **8.** $\frac{c}{15}$. **9.** $x = 13$. **10.** 35 м. **11.** А. **12.** В. **13.** А. **14.** Б. **15.** 1) → г); 2) → а); 3) → в); 4) → б. **16.** В.

Работа № 10

Вариант 1. **1.** Б. **2.** В. **3.** Г. **4.** 2. **5.** А. **6.** $(x-1)(x+3)$. **7.** $\frac{4xy}{x^2-y^2}$. **8.** Г. **9.** В. **10.** Г. **11.** $(-2; 5)$. **12.** Б. **13.** Б. **14.** В. **15.** 1) → в); 2) → б); 3) → а). **16.** А.

Вариант 2. **1.** В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** 3,2. **5.** Б. **6.** $(x+5)(x-2)$. **7.** $\frac{2xy}{x^2-y^2}$. **8.** А. **9.** В. **10.** В. **11.** $(2; -3)$. **12.** Г. **13.** Г. **14.** Г. **15.** 1) → г); 2) → а); 3) → б). **16.** А.

Работа № 11

Вариант 1. **1.** А. **2.** Г. **3.** 2,5. **4.** Г. **5.** Б. **6.** А. **7.** $\sqrt{7}$. **8.** Б. **9.** $x_1 = -6$; $x_2 = 6$. **10.** 16 карандашей. **11.** $x = 2$. **12.** 1) → б); 2) → г); 3) → в). **13.** Б. **14.** В. **15.** $(3; 0)$. **16.** Б.

Вариант 2. **1.** Г. **2.** Г. **3.** $-\frac{1}{9}$. **4.** А. **5.** Б. **6.** Б. **7.** $\sqrt{5}$. **8.** Б. **9.** $x_1 = -8$; $x_2 = 8$. **10.** 30 р. **11.** $x = 1$. **12.** 1) → в); 2) → а); 3) → б). **13.** Г. **14.** Г. **15.** $(-1; 0)$. **16.** В.

Работа № 12

Вариант 1. **1.** 1) → в); 2) → б); 3) → г). **2.** $3y^2 + 64$. **3.** $\frac{a+2}{4a}$. **4.** Г. **5.** Г. **6.** В. **7.** В. **8.** А. **9.** $x_1 = 0,5$; $x_2 = -2$. **10.** 150 км. **11.** В. **12.** $x \leqslant -0,5$. **13.** Б. **14.** В. **15.** А. **16.** Г.

Вариант 2. **1.** 1) → г); 2) → в); 3) → б). **2.** $3b^2 - 16$. **3.** $\frac{3x}{x+4}$. **4.** В. **5.** В. **6.** Г. **7.** Г. **8.** Б. **9.** $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = -3$. **10.** 240 км. **11.** Г. **12.** $x \geqslant -1,5$. **13.** Г. **14.** Б. **15.** В. **16.** В.

РАЗДЕЛ II

Задания для второй части экзаменационной работы

1. Выражения и их преобразования

Задания направлены на проверку умений:

— выполнять разложение многочленов на множители с использованием нескольких способов;

— выполнять многошаговые преобразования целых и дробных выражений, применяя широкий набор изученных алгоритмов;

— выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целыми показателями, квадратные корни;

— применять преобразования для решения задач из различных разделов курса (например, нахождение наибольшего или наименьшего значения выражения).

2 балла

Разложите на множители (1.1—1.5).

1.1. 1) $a^3 - ab - a^2b + a^2$; 2) $x^2y - x^2 - xy + x^3$.

1.2. 1) $ac^2 - c^2 - ac + c$; 2) $x^2y - xy - x^2 + x$.

1.3. 1) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 4x + 3y$;

2) $4c^2 - 20ac + 25a^2 + 5a - 2c$.

1.4. 1) $2x + y + y^2 - 4x^2$; 2) $a - 3b + 9b^2 - a^2$.

1.5. 1) $a^2 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$; 2) $1 - 4x^2 - 4xy - y^2$.

Сократите дробь (1.6—1.9).

1.6. 1) $\dfrac{3x^2-7x+2}{2-6x}$; 2) $\dfrac{5x^2-12x+4}{6-15x}$.

1.7. 1) $\dfrac{2x-3x^2}{3x^2+7x-6}$; 2) $\dfrac{x-7x^2}{7x^2+13x-2}$.

1.8. 1) $\dfrac{16a^2-8a+1}{1-4a+x-4ax}$; 2) $\dfrac{6c-1-y+6cy}{1-12c+36c^2}$.

1.9. 1) $\dfrac{3x+xy^2-x^2y-3y}{y^2-x^2}$; 2) $\dfrac{b^2-a^2}{a^2b+2b-ab^2-2a}$.

Упростите выражение (1.10—1.14).

1.10. 1) $\left(\frac{2m}{2m+n}-\frac{4m^2}{4m^2+4mn+n^2}\right):\left(\frac{2m}{4m^2-n^2}+\frac{1}{n-2m}\right);$

2) $\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right):\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{y^2-x^2}\right).$

1.11. 1) $\left(\frac{y}{x^2-xy}-\frac{1}{x-y}\right):\left(\frac{x+y}{x^2-xy}-\frac{y}{xy-y^2}\right);$

2) $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{b^2+ab}\right)\cdot\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}-\frac{b}{a^2-ab}\right).$

1.12. 1) $\left(\frac{2}{c-2}+\frac{3c-21}{c^2+c-6}+\frac{2c}{c+3}\right)\cdot\frac{c}{2c-5};$

2) $\left(\frac{3}{y-4}+\frac{4y-6}{y^2-3y-4}+\frac{2y}{y+1}\right)\cdot\frac{y}{2y-3}.$

1.13. 1) $\frac{4x^2-1}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x-2}{2x+1}-\frac{1+x}{x-3};$

2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{3x+1}\cdot\frac{9x^2-1}{x^2-x-2}.$

1.14. 1) $\frac{3c-6}{c+2}-\frac{c}{(c+2)^2}:\frac{c}{c^2-4}-\frac{4c}{c+2};$

2) $\frac{6}{a-1}-\frac{10}{(a-1)^2}:\frac{10}{a^2-1}-\frac{2a+2}{a-1}.$

Упростите выражение (1.15—1.16).

1.15. 1) $\frac{8\cdot 100^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}};$ 2) $\frac{4\cdot 36^n}{3^{2n-3}\cdot 2^{2n+2}}.$

1.16. 1) $\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot 5^n};$ 2) $\frac{10\cdot 2^n}{2^{n+1}+2^{n-1}}.$

Найдите значение выражения (1.17—1.18).

1.17. 1) $3x^2-2x-1$ при $x=\frac{1-\sqrt{2}}{3};$

2) $2x^2-6x+3$ при $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

1.18. 1) $a^2 - 6a - 1$ при $a = \sqrt{5} + 4$;

2) $c^2 - 4c + 2$ при $c = \sqrt{2} - 3$.

Упростите выражение (1.19—1.20).

1.19. 1) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}} - \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$.

1.20. 1) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{\sqrt{15}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{15}-3}}$.

1.21. Докажите, что:

1) $\sqrt{17-12\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{21-12\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$.

4 балла

Разложите на множители (1.22—1.26).

1.22. 1) $ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x$;

2) $a^2b - ab^2 - ac + ab + bc - c$.

1.23. 1) $ax^2 - 2ax - bx^2 + 2bx - b + a$;

2) $by^2 + 4by - cy^2 - 4cy - 4c + 4b$.

1.24. 1) $x^4 - 7x^2 - 18$; 2) $x^4 - x^2 - 12$.

1.25. 1) $4x^4 - 5x^2 + 1$; 2) $9x^4 - 13x^2 + 4$.

1.26. 1) $x^2y^2 - 5xy^2 + 6y^2 - x^2 + 5x - 6$;

2) $x^2y^2 - 5x^2y + 4x^2 - y^2 + 5y - 4$.

Сократите дробь (1.27—1.30).

1.27. 1) $\dfrac{2a^2-2b^2-a+b}{1-2a-2b}$; 2) $\dfrac{y-x-3y^2+3x^2}{3x+3y-1}$.

1.28. 1) $\dfrac{x^2-10xy+25y^2-1}{(1-x+5y)(x+5y+1)}$; 2) $\dfrac{a^2-6ab+9b^2-4}{(2-a+3b)(a+3b+2)}$.

1.29. 1) $\dfrac{6a^2-a-1}{8a+b-2ab-4}$; 2) $\dfrac{10a-3b-2ab+15}{4a^2+4a-3}$.

1.30. 1) $\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{2x^2+6}$; 2) $\dfrac{6x^2+2}{(x+1)^3-(x-1)^3}$.

Упростите выражение (1.31—1.35).

1.31. 1) $\dfrac{a-3}{4a^2+24a+36}:\left(\dfrac{a}{3a-9}-\dfrac{3}{a^2+3a}+\dfrac{a^2+9}{27-3a^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{x}{4x+16}-\dfrac{x^2+16}{4x^2-64}-\dfrac{4}{x^2-4x}\right)\cdot\dfrac{3x^2-24x+48}{x+4}$.

1.32. 1) $\dfrac{36-y^2}{y-8}\cdot\left(\dfrac{y}{y-6}-\dfrac{2y}{y^2-12y+36}\right)+\dfrac{12y}{y-6}$;

2) $\left(\dfrac{3x}{x-4}-\dfrac{6x}{x^2-8x+16}\right):\dfrac{x-6}{16-x^2}+\dfrac{24x}{x-4}$.

1.33. 1) $\left(\dfrac{a+b}{b-a}-\dfrac{b-a}{b+a}-\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}\right):\left(\dfrac{a^2}{b^3-ab^2}+\dfrac{a-b}{b^2}+\dfrac{2}{b}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{b^3+b^2}-\dfrac{1-b}{b^2}-1\right):\left(\dfrac{b+2}{2-b}-\dfrac{2-b}{2+b}-\dfrac{4b^2}{b^2-4}\right)$.

1.34. 1) $\dfrac{c+40}{c^3-16c}:\left(\dfrac{c-4}{3c^2+11c-4}-\dfrac{16}{16-c^2}\right)$;

2) $\dfrac{a-4}{a^3-a}:\left(\dfrac{a-1}{2a^2+3a+1}-\dfrac{1}{a^2-1}\right)$.

1.35. 1) $\left(\dfrac{m}{m^2-2m+1}-\dfrac{m+2}{m^2+m-2}\right):\dfrac{1}{(2m-2)^2}$;

2) $\left(\dfrac{n+2}{n^2-n-6}-\dfrac{n}{n^2-6n+9}\right)\cdot(2n-6)^2$.

Докажите тождество (1.36—1.37).

1.36. 1) $\dfrac{a^6-b^6}{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}-(a^2-b^2)=0$;

2) $\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^6-1}=0$.

1.37. 1) $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}=\dfrac{1}{x+y}$;

2) $\dfrac{b(a+b)^2}{a^4-b^4}+\dfrac{a}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{a-b}$.

1.38. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{b-2\sqrt{b}-3}{3-\sqrt{b}}$.

1.39. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}+\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}+\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}$.

Докажите равенство (1.40—1.41).

1.40. 1) $\dfrac{\left(\sqrt{\sqrt{20}-4}+\sqrt{\sqrt{20}+4}\right)^2}{\sqrt{(4-\sqrt{20})^2}}=3\sqrt{20}+14$;

2) $\dfrac{\left(\sqrt{\sqrt{8}+2}+\sqrt{\sqrt{8}-2}\right)^2}{\sqrt{(2-\sqrt{8})^2}}=2\sqrt{8}+6$.

1.41. 1) $\dfrac{x-y}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{y}}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$; 2) $\dfrac{b-a}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}-\dfrac{\sqrt{b}}{b}$.

6 баллов

1.42. Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

1) $x(x+1)(x+2)(x+3)-15$;

2) $(x+3)(x-2)(x+1)x+8$.

1.43. Разложите на множители многочлен:

1) $2a^2-x^2-ax-a+x$; 2) $x^2-2y^2-xy-x-y$.

1.44. Докажите, что при любых значениях переменной выражение принимает положительные значения:

1) x^4+3x^2-x+3; 2) x^4+2x^2-x+5.

1.45. 1) При каких значениях x и y выражение

$$6y-4x-x^2-y^2$$

принимает наибольшее значение?

2) При каких значениях x и y выражение

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y$$

принимает наименьшее значение?

1.46. Найдите наибольшее значение выражения и определите, при каких значениях x и y оно достигается:

1) $\dfrac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}$; 2) $\dfrac{8}{x^2+y^2-2x-10y+30}$.

1.47. 1) При каких значениях переменных m и n, связанных соотношением $m + n = 1$, выражение $4m^2 + 2mn - n^2$ принимает наименьшее значение?

2) При каких значениях переменных m и n, связанных соотношением $m - n = 1$, выражение $m^2 + 2mn - 4n^2$ принимает наибольшее значение?

1.48. 1) Имеет ли произведение ab, где $b = 5 - a$, наибольшее значение и если имеет, то при каких значениях a и b оно достигается?

2) Имеет ли произведение ab, где $b = a + 3$, наименьшее значение и если имеет, то при каких значениях a и b оно достигается?

1.49. 1) Положительные числа a и b связаны соотношением $3a^2 - 2b^2 = 5ab$. Найдите значение выражения $\dfrac{2a-b}{a+3b}$.

2) Отрицательные числа a и b связаны соотношением $5a^2 - 2b^2 = 3ab$. Найдите значение выражения $\dfrac{3a(a+b)}{b(2a-b)}$.

Сократите дробь (1.50—1.51).

1.50. 1) $\dfrac{2x^2+5xy-3y^2}{2x^2-xy}$; 2) $\dfrac{2y^2-3xy-9x^2}{y^2-3xy}$.

1.51. 1) $\dfrac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{3\sqrt{x}-2x-x\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}$.

1.52. Найдите значение выражения:

1) $1-\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a(\sqrt{a}+1)}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ при $a = 0{,}9$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1-a\sqrt{a}}{a(1-\sqrt{a})}+1$ при $a = 0{,}4$.

1.53. 1) Является ли число $A = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$ корнем уравнения $x^2 - 3\sqrt{6}\,x + 12 = 0$?

2) Является ли число $B = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ корнем уравнения $x^2 + 5\sqrt{2}\,x - 12 = 0$?

1.54. Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{20}+\sqrt{19}}$?

1.55. Найдите наименьшее значение выражения и укажите пары значений x и y, при которых оно достигается:

1) $\sqrt{2x-2y+10} + \sqrt{x+3y-3}$;

2) $\sqrt{3x-2y-7} + \sqrt{x-y-3}$.

1.56. При каких значениях переменных данное выражение принимает наименьшее значение:

1) $\sqrt{x+2y+5} + \sqrt{2x-3y-4}$;

2) $\sqrt{3a-b+10} + \sqrt{2a+3b+3}$?

1.57. Найдите наименьшее значение выражения и укажите пары значений переменных, при которых оно достигается:

1) $\sqrt{x^2-y+1} + \sqrt{3x-y-1}$;

2) $\sqrt{a^2+b-5} + \sqrt{a+b-5}$.

1.58. Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается:

1) $(3x - 4y - 2)^2 + (x - 5y + 3)^2$;

2) $|6x + 5y + 7| + |2x + 3y + 1|$.

2. Уравнения

Задания направлены на проверку умений:

— решать целые и дробно-рациональные уравнения; применять при решении уравнений алгебраические преобразования, а также такие приемы, как разложение на множители, замена переменной;

— отвечать на вопросы, связанные с исследованием уравнений, содержащих буквенные коэффициенты, используя при необходимости графические представления;

— решать уравнения графически.

2 балла

Решите уравнение (2.1—2.13).

2.1. 1) $(3 - 2x)(6x - 1) = (2x - 3)^2$;

2) $(5 + 4x)^2 = (9 - 21x)(4x + 5)$.

2.2. 1) $(1 - 2x)(4x^2 + 2x + 1) = 8(1 - x^2)(x + 2)$;

2) $8(x - 2)(x^2 - 1) = (4x^2 - 2x + 1)(2x + 1)$.

2.3. 1) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$;

2) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$.

2.4. 1) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$;

2) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$.

2.5. 1) $3x^2(2x - 1) + x(2x - 1) + 2(1 - 2x) = 0$;

2) $2x^2(2x - 5) + x(2x - 5) + (5 - 2x) = 0$.

2.6. 1) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$; 2) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

2.7. 1) $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$;

2) $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.

2.8. 1) $\frac{6 - x}{3x^2 - 12} - \frac{2}{x - 2} = 1$; 2) $\frac{x + 8}{2x^2 - 18} - \frac{2}{x - 3} = 1$.

2.9. 1) $\frac{x + 5}{x - 5} + \frac{x}{x + 5} = \frac{50}{x^2 - 25}$; 2) $\frac{x}{x + 2} + \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{8}{x^2 - 4}$.

2.10. 1) $\frac{2x}{2x - 3} - \frac{3x}{2x + 3} = \frac{15 - 32x^2}{4x^2 - 9}$; 2) $\frac{2x}{3x - 1} - \frac{x}{3x + 1} = \frac{9 - 3x^2}{9x^2 - 1}$.

2.11. 1) $\frac{2}{3x + 1} - \frac{x}{1 - 3x} = \frac{2x}{9x^2 - 1}$; 2) $\frac{6}{1 - 2x} + \frac{9}{2x + 1} = \frac{12x^2 - 15}{4x^2 - 1}$.

2.12. 1) $\frac{16}{x^2 + x} - \frac{6}{x^2 - x} = \frac{1}{x}$; 2) $\frac{3}{x^2 + 4x} - \frac{15}{x^2 - 4x} = \frac{4}{x}$.

2.13. 1) $\frac{1}{x + 6} + \frac{2}{x - 2} = \frac{2}{x - 6}$; 2) $\frac{7}{x - 3} + \frac{1}{x + 6} = \frac{5}{x - 6}$.

2.14. Решите графически уравнение:

1) $x^3 - 2x - 4 = 0$; 2) $x^3 - 2x + 4 = 0$.

2.15. С помощью графиков определите, между какими целыми числами находится корень уравнения:

1) $\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{2}x$; 2) $\frac{4}{3}x - 4 = \sqrt{x}$.

4 балла

Решите уравнение (2.16—2.21).

2.16. 1) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$;

2) $x^4 - 16x^2 + 24x - 9 = 0$.

2.17. 1) $x^5 - 9x^3 + 20x = 0$; 2) $x^5 - 7x^3 + 12x = 0$.

2.18. 1) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 17) = -60$;

2) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) + 24 = 0$.

2.19. 1) $\left(\frac{x^2-3x}{2} + 3\right)\left(\frac{x^2-3x}{2} - 4\right) + 10 = 0$;

2) $\left(2 - \frac{x^2+2x}{3}\right)\left(4 - \frac{x^2+2x}{3}\right) = 3$.

2.20. 1) $(x - 5)^4 - 3(x - 5)^2 - 4 = 0$;

2) $(x + 2)^4 + 5(x + 2)^2 - 36 = 0$.

2.21. 1) $x + \sqrt{x} - 20 = 0$; 2) $x - 6\sqrt{x} - 27 = 0$.

2.22. Выясните, имеет ли корни уравнение:

1) $x^2 + 2x\sqrt{3} + 14 = -4x$; 2) $x^2 + 2x\sqrt{5} + 18 = -4x$.

2.23. 1) При каких значениях k уравнение

$$x^2 + kx + 2 = 0$$

имеет корни? Приведите пример положительного значения k, при котором выполняется это условие.

2) При каких значениях k уравнение

$$3x^2 + kx + 1 = 0$$

не имеет корней? Приведите пример отрицательного значения k, при котором выполняется это условие.

2.24. 1) Найдите все целые значения k, при которых уравнение $kx^2 - 6x + k = 0$ имеет два корня.

2) Найдите все целые значения m, при которых уравнение $mx^2 - 5x + \frac{1}{4}m = 0$ имеет два корня.

2.25. 1) При каких значениях c уравнение

$$x^2 - 18x + 100 = c$$

имеет корни?

2) При каких значениях c уравнение

$$-x^2 + 12x - 21 = c$$

имеет корни?

2.26. 1) Один из корней уравнения $5x^2 - 2x + 3p = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

2) Один из корней уравнения $3x^2 + 5x + 2m = 0$ равен -1. Найдите второй корень.

Решите уравнение (2.27—2.30).

2.27. 1) $\frac{4x+8}{x^2-4} + 2x + 5 = 0$; 2) $\frac{6x-18}{x^2-9} + 2x - 7 = 0$.

2.28. 1) $\frac{36}{4-x^2} + 2 = \frac{1-x}{x+2} - \frac{9}{x-2}$; 2) $\frac{3x}{x+3} - \frac{42}{x^2-9} = 1 + \frac{7}{3-x}$.

2.29. 1) $\frac{2-x}{x^2+3x} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}$; 2) $\frac{4}{4x^2-1} - \frac{x-1}{2x^2+x} = \frac{2}{2x-1}$.

2.30. 1) $\frac{2}{x^2+10x+25} - \frac{10}{25-x^2} = \frac{1}{x-5}$;

2) $\frac{1}{x^2-12x+36} + \frac{12}{36-x^2} = \frac{1}{x+6}$.

6 баллов

Решите уравнение (2.31—2.34).

2.31. 1) $(2x^2 - x + 1)^2 + 6x = 1 + 9x^2$;
2) $x^2 + 1 = 2x + (3x^2 - x - 2)^2$.

2.32. 1) $(x - 2)^2(x^2 - 4x + 3) = 12$;
2) $(x^2 + 6x)^2 - 2(x + 3)^2 - 17 = 0$.

2.33. 1) $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$;
2) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) = 1$.

2.34. 1) $(x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 60$;
2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 120$.

2.35. 1) При каких значениях m уравнение
$$x^3 + 6x^2 + mx = 0$$
имеет два корня?

2) При каких значениях k уравнение
$$4x^3 + 4x^2 + kx = 0$$
имеет два корня?

2.36. 1) При каких значениях a корни уравнения
$$x^2 - 2ax + (a + 1)(a - 1) = 0$$
принадлежат промежутку $[-5; 5]$?

2) При каких значениях p корни уравнения
$$x^2 - 2(p + 1)x + p(p + 2) = 0$$
принадлежат промежутку $[-1; 3]$?

2.37. 1) При каких значениях a один корень уравнения $x^2 - (a + 1)x + 2a^2 = 0$ больше $\frac{1}{2}$, а другой меньше $\frac{1}{2}$?

2) При каких значениях a один корень уравнения $x^2 - a^2x - 4a + 2 = 0$ меньше 2, а другой больше 2?

2.38. 1) При каких значениях a число 1 находится между корнями квадратного трехчлена $x^2 + (a + 1)x - a^2$?

2) При каких значениях a число 1 находится между корнями квадратного трехчлена $-x^2 + 2(a - 1)x + a^2$?

2.39. 1) При каких значениях b уравнение
$$x^2 + 2(b + 1)x + 9 = 0$$
имеет два различных положительных корня?

2) При каких значениях k уравнение
$$x^2 - 4x + (2 - k)(2 + k) = 0$$
имеет корни разных знаков?

2.40. 1) При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - m)x - m - 3 = 0$ минимальна?

2) При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ минимальна?

2.41. 1) Докажите, что уравнение
$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 1$$
не имеет корней.

2) Докажите, что уравнение
$$(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) = 2$$
не имеет корней.

2.42. 1) Докажите, что число 1 является корнем уравнения $(2x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x + 2) = 1$ и других корней у этого уравнения нет.

2) Докажите, что уравнение

$$(x^2 - 4x + 5)(2x^2 - 8x + 9) = 1$$

имеет корень, равный 2, и других корней у него нет.

Решите уравнение (2.43—2.48).

2.43. 1) $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0;$

2) $\frac{x^2-14}{x} - \frac{10x}{x^2-14} = 3.$

2.44. 1) $\left(\frac{x^2+12}{9-x^2}\right)^2 - \left(\frac{7x}{x^2-9}\right)^2 = 0;$ 2) $\left(\frac{x^2+10}{4-x^2}\right)^2 - \left(\frac{7x}{x^2-4}\right)^2 = 0.$

2.45. 1) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12};$ 2) $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x(x-4)} = \frac{4}{3}.$

2.46. 1) $\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5;$ 2) $\left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 = 4 - \frac{3x^2}{x-3}.$

2.47. 1) $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9;$

2) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x - \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$

2.48. 1) $\frac{12}{(x+1)(x+5)} + \frac{15}{(x+2)(x+4)} = 2;$

2) $\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{9}{(x-1)(x+5)} = -1.$

3. Системы уравнений

Задания направлены на проверку умений:

— решать системы линейных уравнений и системы, содержащие нелинейные уравнения, способами подстановки и сложения; применять некоторые специальные приемы решения систем уравнений;

— отвечать на вопросы, связанные с исследованием систем, содержащих буквенные коэффициенты, используя при необходимости графические представления.

2 балла

Решите систему уравнений (3.1—3.7).

3.1. 1) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y-2x}{5} = 1\frac{1}{3} \\ \frac{y}{2} + \frac{5}{6} = \frac{x+y}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{y-3x}{2} = -6 \\ \frac{y-x}{3} - \frac{1}{6} = \frac{y}{2}. \end{cases}$

3.2. 1) $\begin{cases} 3(x-y)-2(x+y)=2x-2y \\ \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{3} = 1 - \frac{y}{15}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5(x+y)-4(x-y)=8y-3x \\ \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{6} = 3. \end{cases}$

3.3. 1) $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2-y=11. \end{cases}$

3.4. 1) $\begin{cases} x-y=5 \\ x^2+2xy-y^2=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x^2+xy+y^2=8. \end{cases}$

3.5. 1) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2=9-2xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=16+2xy. \end{cases}$

3.6. 1) $\begin{cases} x^2-xy=12-y^2 \\ x-2y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy. \end{cases}$

3.7. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \\ x^2+y^2=50; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ x^2-y^2=21. \end{cases}$

3.8. Вычислите координаты точек пересечения парабол:

1) $y = 3x^2 - 8x - 2$ и $y = x^2 - 4$;

2) $y = 2x^2 - 6x - 1$ и $y = x^2 - 2x$.

3.9. С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} xy=2 \\ y+x^2=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2-y=5. \end{cases}$

4 балла

Решите систему уравнений (3.10—3.24).

3.10. 1) $\begin{cases}(x-1)(y+4)=0\\ y^2+xy-2=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x+2)(y-1)=0\\ x^2-xy-12=0.\end{cases}$

3.11. 1) $\begin{cases}(x-1)(2y+1)=0\\ 2y^2+x-y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2x-1)(y+2)=0\\ x^2-4x+y=-5.\end{cases}$

3.12. 1) $\begin{cases}xy=-8\\ (x-4)(y-2)=-12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy=24\\ (x+1)(y-2)=20.\end{cases}$

3.13. 1) $\begin{cases}xy=4\\ y^2-x^2=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-y^2=15\\ xy=18.\end{cases}$

3.14. 1) $\begin{cases}x^2+y^2=40\\ xy=-12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy=8\\ x^2+y^2=20.\end{cases}$

3.15. 1) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=4\\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=10.\end{cases}$

3.16. 1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ xy=-18;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=2\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

3.17. 1) $\begin{cases}\dfrac{6}{x-y}-\dfrac{8}{x+y}=-2\\ \dfrac{9}{x-y}+\dfrac{10}{x+y}=8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{4}{x-y}+\dfrac{12}{x+y}=3\\ \dfrac{8}{x-y}-\dfrac{18}{x+y}=-1.\end{cases}$

3.18. 1) $\begin{cases}x+y-xy=-14\\ x+y+xy=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y+xy=-11\\ x-y-xy=1.\end{cases}$

3.19. 1) $\begin{cases}5(x+y)+2xy=-19\\ x+3xy+y=-35;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4(x-y)-3xy=-14\\ 7x+4xy-7y=31.\end{cases}$

3.20. 1) $\begin{cases}xy-x^2=-18\\ xy+x^2=14;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y^2+xy=3\\ y^2-xy=5.\end{cases}$

3.21. 1) $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x^4-y^4=15;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^4-y^4=5\\ x^2-y^2=2.\end{cases}$

3.22. 1) $\begin{cases}x+y=7\\ (x^2-y^2)(x-y)=175;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=5\\ (x+y)(x^2-y^2)=245.\end{cases}$

3.23. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = 0. \end{cases}$

3.24. 1) $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 5x + 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 2y = 18 \\ 7x + 6y = -10 \\ 2x^2 - y = 12. \end{cases}$

3.25. При каких значениях p система уравнений имеет решение:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = -3 \\ x + 2y = p; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + y = 4 \\ 2x - y = p? \end{cases}$

3.26. 1) Вычислите координаты точек пересечения параболы и гиперболы:

1) $y = x^2 + 3x - 1$ и $y = \frac{3}{x}$;

2) $y = x^2 - x - 4$ и $y = -\frac{4}{x}$.

3.27. Найдите сумму $x + y + z$, если:

1) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{z}{4} + \frac{y}{12} = 1 \\ \frac{y}{5} + \frac{x}{10} + \frac{z}{3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y}{6} - \frac{x}{12} - \frac{z}{4} = 5 \\ \frac{z}{3} + \frac{y}{8} + \frac{x}{4} = 10. \end{cases}$

6 баллов

Решите систему уравнений (3.28—3.30).

3.28. 1) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 32 \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

3.29. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x + y + xy = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$

3.30. 1) $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x - 5y = 8 \\ y^2 + x + 2x^2 = 40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y + 2y^2 = 29 \\ y^2 - 0{,}5y + x = 15. \end{cases}$

Найдите решения уравнения (3.31—3.32).

3.31. 1) $(x + 2y)^2 + (x - y - 1)^2 = 0$;

2) $(y - 2x)^2 + (x + y - 2)^2 = 0$.

3.32. 1) $(x - y^2)^2 + (x^2 - x)^2 = 0$;

2) $(4y - y^2)^2 + (x^2 - y)^2 = 0$.

3.33. 1) При каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет единственное решение?

2) При каких значениях p система уравнений

$$\begin{cases} y = p - x \\ 4y = x^2 \end{cases}$$

не имеет решений?

3.34. 1) При каких отрицательных значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

имеет два решения?

2) При каких положительных значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет два решения?

3.35. 1) Найдите значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет три решения.

2) Найдите значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + x^2 = a \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

имеет три решения.

С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений (3.36—3.37).

3.36. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-2y)(2x-y) = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 - xy = 0. \end{cases}$

3.37. 1) $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ y = x(x+4); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x(6-x) \\ x^2 = y^2. \end{cases}$

4. Неравенства

Задачи этого раздела направлены на проверку умений:

— решать линейные неравенства с одной переменной и их системы, требующие алгебраических преобразований; выбирать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям;
— решать квадратные неравенства и системы, включающие квадратные неравенства;
— решать задачи, связанные с исследованием неравенств и систем, содержащих буквенные коэффициенты;
— применять аппарат неравенств для решения математических задач из других разделов курса.

2 балла

4.1. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2x-7}{6} + \dfrac{7x-2}{3} \leqslant 3 - \dfrac{1-x}{2}$;

2) $\dfrac{4x+13}{10} - \dfrac{5+2x}{4} \geqslant \dfrac{6-7x}{20} - 1$.

4.2. 1) Найдите наименьшее целое значение a, при котором разность дробей

$$\frac{16-3a}{3} \text{ и } \frac{3a+7}{4}$$

отрицательна.

2) Найдите наибольшее целое значение x, при котором сумма дробей

$$\frac{11-2x}{5} \text{ и } \frac{3-2x}{2}$$

положительна.

4.3. 1) При каких целых положительных значениях a верно неравенство $a+\frac{8-11a}{12} > \frac{7+a}{4}-\frac{5-a}{3}$?

2) При каких целых отрицательных значениях x верно неравенство $\frac{13x-1}{15}-\frac{2x-1}{5} < x-\frac{x-2}{3}$?

Решите систему неравенств (4.4—4.8).

4.4. 1) $\begin{cases} 2(x-3)-4(3x+7) \leqslant 2+10x \\ 3x-10(x+2) \leqslant 3(x-4); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(2x-5)-3(4x+3) \geqslant 2(2x-1) \\ 2(13-5x) \geqslant 5(3x+8)-10(3x-1). \end{cases}$

4.5. 1) $\begin{cases} \frac{3}{5}-\frac{2-4x}{3} \leqslant \frac{2x-3}{2} \\ \frac{2x-27}{2} \geqslant 4x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1+2x}{4} \leqslant \frac{5+4x}{10}-\frac{2}{5} \\ 2x \geqslant \frac{14x+17}{2}. \end{cases}$

4.6. 1) $\begin{cases} 1-\frac{1-x}{2} < 4-\frac{5+4x}{3} \\ 2-\frac{x+8}{4} > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2-\frac{3+2x}{3} > 1-\frac{x+6}{2} \\ 3+\frac{x}{4} < x. \end{cases}$

4.7. Решите неравенство:

1) $(5-3x)(x-1) < -1$; 2) $(1-x)(2x+1) > -9$.

4.8. 1) Найдите все решения неравенства $\frac{3x^2}{4} \leqslant \frac{4-5x}{2}$, принадлежащие промежутку $[-1; 1]$.

2) Найдите все решения неравенства $\frac{2x^2}{9} \leqslant \frac{x+3}{3}$, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$.

4.9. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2}{2} \geqslant \frac{2x+2}{3}$; 2) $\frac{11x-4}{5} \geqslant \frac{x^2}{2}$.

4.10. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x-\frac{3}{4}x^2}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{2}x^2+x}$?

4.11. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{3-2x-x^2}$; 2) $\sqrt{10+3x-x^2}$.

4 балла

4.12. Сравните значения выражений:

1) $\sqrt{101}+\sqrt{102}$ и $\sqrt{99}+\sqrt{104}$;

2) $\sqrt{99}+\sqrt{108}$ и $\sqrt{103}+\sqrt{104}$.

4.13. Какое из чисел больше:

1) $4+2\sqrt{2}$ или $\sqrt{11}+\sqrt{13}$; 2) $3+2\sqrt{5}$ или $\sqrt{14}+\sqrt{15}$?

4.14. Сравните числа:

1) $\sqrt{37}+\sqrt{35}$ и 12; 2) $\sqrt{15}+\sqrt{17}$ и 8.

Решите неравенство (4.15—4.18).

4.15. 1) $(\sqrt{5}-2{,}5)(3-2x)<0$; 2) $(2{,}5-\sqrt{6})(10-4x)>0$.

4.16. 1) $(1{,}5-\sqrt{3})(16-x^2)>0$; 2) $(\sqrt{6}-2{,}5)(9-x^2)>0$.

4.17. 1) $\dfrac{-6}{(3-x)(9+2x)}>0$; 2) $\dfrac{15}{(4+x)(2-5x)}<0$.

4.18. 1) $\dfrac{5}{x^2-x+1}>0$; 2) $\dfrac{8}{x^2-x+2}<0$.

4.19. 1) При каких положительных значениях x верно неравенство $4x-x^2\leqslant 3$?

2) При каких отрицательных значениях x верно неравенство $x^2+3x\geqslant -2$?

4.20. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} 4x^2+9x-9\leqslant 0 \\ \dfrac{x+1}{2}<0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x^2+7x-24\leqslant 0 \\ \dfrac{1-x}{2}>0. \end{cases}$

4.21. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x^2-14x+8<0 \\ 6x-5>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x^2+12x-9<0 \\ 3x-1<0. \end{cases}$

4.22. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-6x+5 \leqslant 0 \\ x^2-8x+15 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-4x+3 \geqslant 0 \\ x^2-x-6 \leqslant 0. \end{cases}$

4.23. 1) Найдите наименьшее целое значение переменной a, при котором имеет смысл выражение

$$\sqrt{2a^2+11a+12} + \sqrt{10-3a-a^2}.$$

2) Найдите наибольшее целое значение переменной a, при котором имеет смысл выражение

$$\sqrt{24+5a-a^2} + \sqrt{2a^2-19a+35}.$$

Найдите область определения выражения (4.24—4.27).

4.24. 1) $\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2} + \sqrt{x^2-4}$;

2) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$.

4.25. 1) $\dfrac{\sqrt{3x^2-x-14}}{x^2-9}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3x^2-5x+2}}{x^2-4}$.

4.26. 1) $\dfrac{\sqrt{2x^2+x-15}}{4x+15}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x-12}}{11-2x}$.

4.27. 1) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-x-2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x-2}$.

6 баллов

4.28. Сравните числа:

1) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{13}-\sqrt{11}$;

2) $\sqrt{14}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{10}-\sqrt{7}$.

4.29. 1) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(\sqrt{2}-2)x > \sqrt{2}+2.$$

2) Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(2-\sqrt{5})x < 2+\sqrt{5}.$$

Решите неравенство (4.30—4.32).

4.30. 1) $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1\right)(4x-13)<0;$

2) $\left(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}-2\right)(10-3x)<0.$

4.31. 1) $3\sqrt{11}(6-3x) > 10(6-3x);$

2) $9(6+2x) < 4\sqrt{5}(6+2x).$

4.32. 1) $(x+1-\sqrt{3})(x-\sqrt{6}+2)>0;$

2) $(x-\sqrt{5}+2)(x+1-\sqrt{2})<0.$

4.33. 1) Найдите целые значения x, при которых выражение $\sqrt{(12-x\sqrt{3})(x\sqrt{2}-10)}$ имеет смысл.

2) Найдите целые значения x, при которых выражение $\sqrt{(18-x\sqrt{3})(20-x\sqrt{5})}$ не имеет смысла.

4.34. Решите неравенство:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0;$ 2) $x^4 - 13x^2 + 36 \geqslant 0.$

4.35. Найдите наименьшее целое значение x, при котором верно неравенство:

1) $x^4 + 4x^2 - 45 \leqslant 0;$ 2) $x^4 - 2x^2 - 48 \leqslant 0.$

Решите неравенство (4.36—4.38).

4.36. 1) $(x^2 + 1)^2 - 12(x^2 + 1) + 20 \geqslant 0;$
2) $(x^2 - 5)^2 - 10(x^2 - 5) - 11 \leqslant 0.$

4.37. 1) $(x^2 + 2x)^2 + 3(x + 1)^2 > 3;$
2) $(x^2 - 4x)^2 + 5(x - 2)^2 > 20.$

4.38. 1) $(x^2 + 3x + 12)(x^2 + 3x - 10) < -120;$
2) $(x^2 - 4x - 15)(x^2 - 4x + 10) \leqslant -150.$

4.39. Найдите все значения a, при которых решением неравенства

$$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 > 0$$

является любое число.

2) Найдте все значения p, при которых неравенство

$$x^2 - (2p + 2)x + 3p + 7 \leqslant 0$$

не имеет решений.

4.40. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x+\sqrt{7} < \sqrt{3} \\ x+\sqrt{6} < \sqrt{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2\sqrt{2} < \sqrt{5} \\ x+3 > \sqrt{6}. \end{cases}$

4.41. 1) При каких значениях p система неравенств

$\begin{cases} 5x+2 \geqslant 17+2x \\ p+2x \leqslant 3+x \end{cases}$ имеет решения?

2) При каких значениях a система неравенств

$\begin{cases} 5-3x < 4x-2 \\ 2+3x < 2a+2x \end{cases}$ не имеет решений?

4.42. При каких значениях m система неравенств имеет ровно три целых решения:

1) $\begin{cases} 5-x < 2 \\ x+6 < m+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4+x > 1 \\ x-5 < m-2? \end{cases}$

4.43. Укажите все целые числа, которые не принадлежат области определения выражения:

1) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-5x+6}$;

2) $\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{x^2-4}$.

4.44. С помощью графиков решите неравенство:

1) $\frac{6}{x} > 5+2x-x^2$;

2) $x^2-2x-5 < -\frac{6}{x}$.

5. Функции

Задания этого раздела направлены на проверку умений:
— строить графики изученных функций;
— на основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выбитыми» точками и т. п.);
— использовать графические представления для ответа на вопросы, связанные с исследованием функций.

2 балла

5.1. 1) Постройте график функции

$$y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 8$?

2) Постройте график функции

$$y = \frac{1}{3}x - 2.$$

Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 9$?

5.2. 1) Постройте график функции

$$y = 0{,}4x - 1.$$

При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

2) Постройте график функции

$$y = -2x - 3.$$

При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

5.3. 1) Постройте график функции

$$y = \frac{3 - x}{2}.$$

При каких значениях x выполняется неравенство $0 \leqslant y \leqslant 1{,}5$?

2) Постройте график функции

$$y = \frac{x - 6}{3}.$$

При каких значениях x выполняется неравенство $-2 \leqslant y \leqslant 0$?

5.4. 1) Постройте график функции

$$y = -2x^2 + 4x - 3.$$

Укажите наибольшее значение этой функции.

2) Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4.$$

Укажите наименьшее значение этой функции.

5.5. 1) Постройте график функции

$$y = -x^2 - 4x.$$

При каких значениях x функция принимает значения, меньшие 0?

2) Постройте график функции

$$y = x^2 - 2x.$$

При каких значениях x функция принимает значения, большие 0?

5.6. 1) Постройте график функции

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1.$$

Какова ее область значений?

2) Постройте график функции

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1.$$

Какова ее область значений?

5.7. 1) Постройте график функции

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 4$?

2) Постройте график функции

$$y = -x^2 + 4x - 3.$$

Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 3$?

5.8. 1) Постройте график функции

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3.$$

Найдите координаты точек пересечения графика с осью x.

2) Постройте график функции

$$y = 2x^2 - 6.$$

Найдите координаты точек пересечения графика с осью x.

5.9. 1) Постройте график функции

$$y = -x^2 - 6x - 5.$$

Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

2) Постройте график функции

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

5.10. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, \text{ если } x \leqslant 2 \\ x - 4, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Укажите промежуток, на котором функция убывает.

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x<-2 \\ -\frac{1}{2}x+3, \text{ если } x \geqslant -2. \end{cases}$$

Укажите промежуток, на котором функция убывает.

4 балла

5.11. 1) Постройте график функции $y=\frac{x^2-5x+6}{2-x}$. При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

2) Постройте график функции $y=\frac{-x^2+6x-8}{2-x}$. При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

5.12. 1) Постройте график функции $y=\frac{x^2-4}{8-4x}$ и найдите ее область значений.

2) Постройте график функции $y=\frac{9-x^2}{6+2x}$ и найдите ее область значений.

5.13. 1) Постройте график функции $y=\frac{x^3-x}{x-1}$. При каких значениях x значения функции положительны?

2) Постройте график функции $y=\frac{4x-x^3}{x+2}$. При каких значениях x значения функции отрицательны?

5.14. 1) Постройте график функции $y=\frac{2x+8}{x^2+4x}$. При каких значениях x выполняется неравенство $y < 2$?

2) Постройте график функции $y=\frac{12-6x}{x^2-2x}$. При каких значениях x выполняется неравенство $y < 6$?

5.15. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{2}, \text{ если } x \leqslant -2 \\ -2, \text{ если } -2<x<2 \\ \frac{x-6}{2}, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Найдите значение функции при $x = -10$.

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x+6}{2}, \text{ если } x \leqslant -2\\ -2, \text{ если } -2<x<2\\ -\frac{x+2}{2}, \text{ если } x \geqslant 2.\end{cases}$$

Найдите значение функции при $x = -20$.

5.16. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2-1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2\\ 2-x, \text{ если } x>2\\ x+2, \text{ если } x<-2.\end{cases}$$

Укажите промежутки возрастания функции.

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}2-2x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1\\ x-1, \text{ если } x>1\\ -x-1, \text{ если } x<-1.\end{cases}$$

Укажите промежутки возрастания функции.

5.17. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2, \text{ если } |x| \leqslant 1\\ x^2-1, \text{ если } |x| > 1.\end{cases}$$

Укажите промежутки убывания функции.

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-2, \text{ если } |x| \leqslant 1\\ 1-x^2, \text{ если } |x| > 1.\end{cases}$$

Укажите промежутки возрастания функции.

5.18. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2\\ 3x-10, \text{ если } x>2\\ -3x-10, \text{ если } x< -2.\end{cases}$$

При каких значениях x значения функции $y = f(x)$ неотрицательны?

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 10-3x, \text{ если } x>2 \\ 10+3x, \text{ если } x<-2. \end{cases}$$

При каких значениях x значения функции $y = f(x)$ положительны?

5.19. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} |x|, \text{ если } |x| \leqslant 2 \\ 6-x^2, \text{ если } |x|>2. \end{cases}$$

При каких значениях x значения функции $y = f(x)$ положительны?

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} -|x|, \text{ если } |x| \leqslant 2 \\ x^2-6, \text{ если } |x|>2. \end{cases}$$

При каких значениях x значения функции $y = f(x)$ неотрицательны?

5.20. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, \text{ если } x \leqslant 0 \\ (x-1)^2, \text{ если } x>0. \end{cases}$$

При каких значениях x выполняется неравенство $y \geqslant 0$?

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, \text{ если } x<0 \\ 1-x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

При каких значениях x выполняется неравенство $y > 0$?

5.21. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} -x-3, \text{ если } x \leqslant -2 \\ 3-x^2, \text{ если } |x|<2 \\ x-3, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки?

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}x+4, \text{ если } x<-2\\ x^2-2, \text{ если } |x|\leqslant 2\\ 4-x, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки?

5.22. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)(x+3), \text{ если } x\leqslant 1\\ (x-1)(x+3), \text{ если } x>1.\end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции две общие точки?

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)(x-4), \text{ если } x<4\\ (x+2)(4-x), \text{ если } x\geqslant 4.\end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции две общие точки?

5.23. 1) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-x(x+4), \text{ если } x<0\\ x(x+4), \text{ если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки?

2) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}x(6-x), \text{ если } x\leqslant 0\\ x(x-6), \text{ если } x>0.\end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки?

6 баллов

5.24. 1) Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-x^2-2x}{2x-x^2}$. При каких значениях x выполняется неравенство $y \leqslant 3$?

2) Постройте график функции $y=\dfrac{-x^3+3x^2-2x}{x^2-2x}$. При каких значениях x выполняется неравенство $y \leqslant 2$?

5.25. 1) Постройте график функции

$$y=\frac{(x^2+7x+12)(x^2+3x+2)}{x^2+6x+8}.$$

2) Постройте график функции

$$y=\frac{(x^2+4x+3)(x^2-3x+2)}{x^2-x-2}.$$

5.26. 1) При каких значениях m прямая $y = m$ имеет одну общую точку с графиком функции

$$y=\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{2-x}?$$

2) При каких значениях m прямая $y = m$ имеет одну общую точку с графиком функции

$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2-x}?$$

5.27. 1) При каких значениях p прямая $y = p$ имеет две общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x-8, \text{ если } x\geqslant 0\\ x^2+2x-8, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

2) При каких значениях p прямая $y = p$ имеет две общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3, \text{ если } x\geqslant 1\\ -x^2-2x+3, \text{ если } x<1?\end{cases}$$

5.28. 1) При каких значениях m прямая $y = m$ имеет две общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x-1, \text{ если } x\geqslant 4\\ -x^2+4x-1, \text{ если } x<4?\end{cases}$$

2) При каких значениях m прямая $y = m$ имеет две общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1, \text{ если } x\geqslant 1\\ x^2+2x-5, \text{ если } x<1?\end{cases}$$

5.29. 1) При каких значениях p прямая $y = p$ имеет две общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}x+6, \text{ если } x<-1\\ x^2-2x+2, \text{ если } -1\leqslant x<2\\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } x\geqslant 2?\end{cases}$$

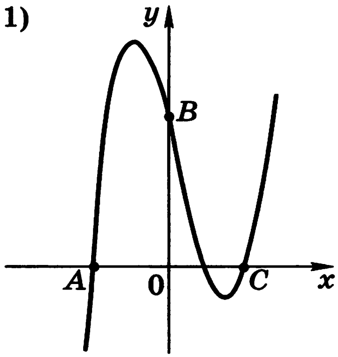
2) При каких значениях p прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x}, \text{ если } x<-2\\ \dfrac{5x-2}{4}, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-8x+14, \text{ если } x>2?\end{cases}$$

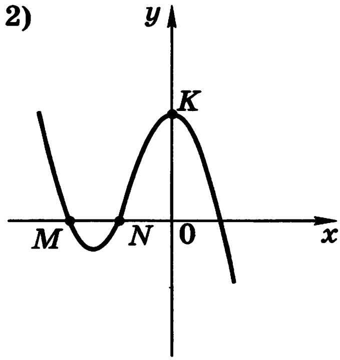
5.30. 1) На рисунке 1 изображен график функции
$$y = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$
Найдите координаты точек A, B и C.

2) На рисунке 2 изображен график функции
$$y = -x^3 - 2x^2 + x + 2.$$
Найдите координаты точек K, M и N.

1)



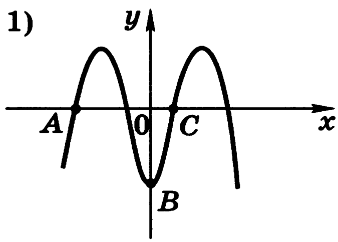
2)



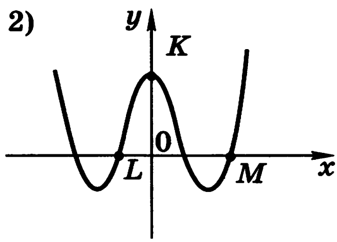
5.31. 1) На рисунке 1 изображен график функции
$$y = -9x^4 + 10x^2 - 1.$$
Найдите координаты точек A, B и C.

2) На рисунке 2 изображен график функции
$$y = 4x^4 - 5x^2 + 1.$$
Найдите координаты точек K, L и M.

1)



2)



5.32. 1) Постройте график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = m$? (Для каждого случая укажите соответствующие значения m.)

2) Постройте график функции $y = |-x^2 - 2x + 8|$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = m$? (Для каждого случая укажите соответствующие значения m.)

5.33. 1) Постройте график функции $y = x^2 - 4|x|$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = m$? (Для каждого случая укажите соответствующие значения m.)

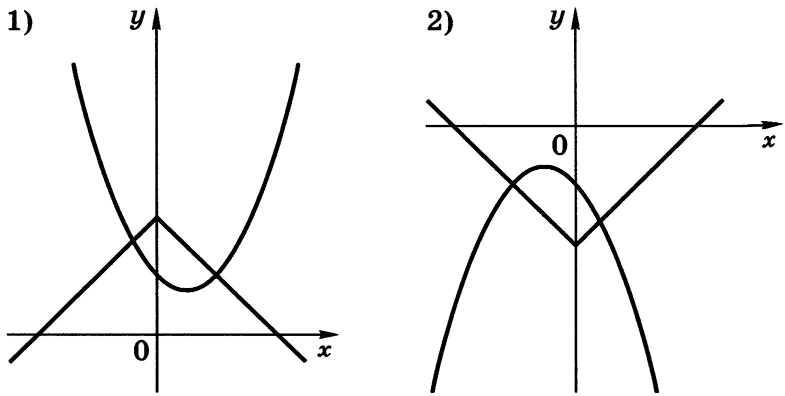
2) Постройте график функции $y = -x^2 + 2|x|$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = m$? (Для каждого случая укажите соответствующие значения m.)

5.34. 1) Постройте график функции $y = |x|(x - 2)$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = p$? (Для каждого случая укажите соответствующие значения p.)

2) Постройте график функции $y = |x|(2 + x)$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = p$? (Для каждого случая укажите соответствующие значения p.)

5.35. 1) На рисунке 1 изображены графики функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = 2 - |x|$. Определите координаты их точек пересечения.

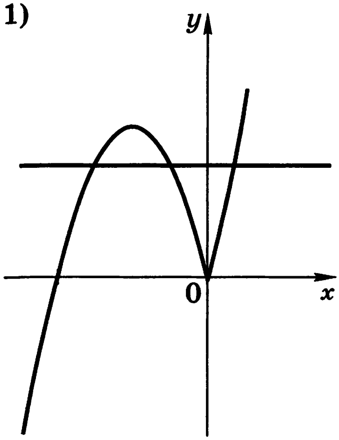
2) На рисунке 2 изображены графики функций $y = -x^2 - x - 1$ и $y = |x| - 2$. Определите координаты их точек пересечения.



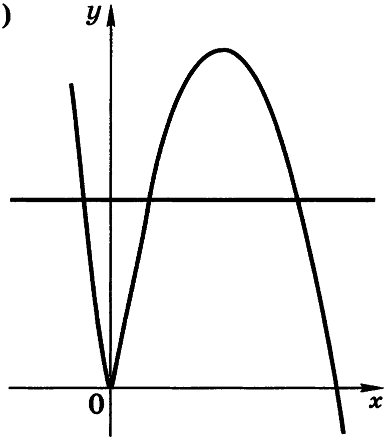
5.36. 1) На рисунке 1 изображены график функции $y = |x|(x + 4)$ и прямая $y = 3$. Определите координаты их точек пересечения.

2) На рисунке 2 изображены график функции $y = |x|(6 - x)$ и прямая $y = 5$. Определите координаты их точек пересечения.

1)



2)



Постройте график функции (5.37—5.40).

5.37. 1) $y = \dfrac{(\sqrt{x^2-1})^2}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{(\sqrt{4-x^2})^2}{x+2}$.

5.38. 1) $y = (\sqrt{x^2+2x})^2$; 2) $y = (\sqrt{3x-x^2})^2$.

5.39. 1) Найдите наибольшее значение функции

$$y = -x + 4\sqrt{x} + 1.$$

При каком значении аргумента оно достигается?

2) Найдите наименьшее значение функции

$$y = x - 6\sqrt{x}.$$

При каком значении аргумента оно достигается?

5.40. 1) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2+10}{x^2+5}.$$

2) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+6}{x^2+8}.$$

6. Координаты и графики

Задания этого раздела направлены на проверку умений:

- **составлять уравнения прямых и парабол по заданным условиям;**
- **решать задачи геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические представления;**
- **строить графики уравнений с двумя переменными.**

2 балла

6.1. 1) Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $A(2{,}5;\ 1)$. Угловой коэффициент этой прямой равен $-0{,}4$. Запишите уравнение этой прямой и найдите координаты точки, в которой она пересекает ось x.

2) Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $A(1{,}6;\ -2{,}2)$. Угловой коэффициент этой прямой равен 0,5. Запишите уравнение этой прямой и найдите координаты точки, в которой она пересекает ось x.

6.2. 1) Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -1{,}5x + 4$ и проходит через точку $C(7;\ -2{,}5)$.

2) Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 3{,}6x - 1$ и проходит через точку $D(-0{,}5;\ 8{,}2)$.

6.3. 1) Прямая $y = kx + b$ пересекает ось y в точке $(0;\ -4{,}5)$ и проходит через точку $(15;\ 3)$. Запишите уравнение этой прямой. В какой координатной четверти нет точек этой прямой?

2) Прямая $y = kx + b$ пересекает ось y в точке $(0;\ -12)$ и проходит через точку $(4;\ -22)$. Запишите уравнение этой прямой. В какой координатной четверти нет точек этой прямой?

6.4. 1) Известно, что парабола $y = ax^2 - 4x + 2$ проходит через точку $D(3;\ -1)$. Найдите коэффициент a. Пересекает ли эта парабола ось x?

2) Известно, что парабола $y = 2x^2 + bx + 3$ проходит через точку $B(2;\ 9)$. Найдите коэффициент b. Пересекает ли эта парабола ось x?

6.5. 1) Прямые $6x - 5y = -2$, $6x + y = 22$ и $y = -2$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите координаты вершин этого треугольника.

2) Прямые $4x - 5y = -3$, $x + 5y = -7$ и $x = 3$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите координаты вершин этого треугольника.

6.6. 1) Выясните, проходят ли прямые

$$3x - y = 4,\ 2x + y = 6 \text{ и } 2x - y = 2$$

через одну точку.

2) Выясните, проходят ли прямые

$$3x + y = 4,\ 2x - y = 1 \text{ и } 3x - y = 2$$

через одну точку.

4 балла

6.7. 1) Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-12; -7)$ и $B(15; 2)$. В каких точках эта прямая пересекает оси координат?

2) Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(10; -3)$ и $B(-20; 12)$. В каких точках эта прямая пересекает оси координат?

6.8. 1) Выясните, лежат ли на одной прямой точки $A(12; 3)$, $B(14; 7)$ и $C(-5; -28)$.

2) Выясните, лежат ли на одной прямой точки $M(-8; 12)$, $N(-10; 18)$ и $Q(10; -42)$.

6.9. 1) Три прямые, попарно пересекаясь, образуют треугольник с вершинами в точках $A(2; 5)$, $B(8; 5)$ и $C(8; 2)$. Запишите уравнения этих прямых.

2) Три прямые, попарно пересекаясь, образуют треугольник с вершинами в точках $M(-1; 4)$, $N(5; 4)$ и $P(-1; -8)$. Запишите уравнения этих прямых.

6.10. 1) Найдите значения b, при которых парабола $y = 2x^2 + bx + 18$ касается оси x. Для каждого значения b определите координаты точки касания.

2) Найдите значения b, при которых парабола $y = -3x^2 + bx - 3$ касается оси x. Для каждого значения b определите координаты точки касания.

6.11. 1) Известно, что парабола $y = ax^2$ проходит через точку $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$. Определите, в каких точках она пересекает прямую $y = 9$.

2) Известно, что парабола $y = ax^2$ проходит через точку $A\left(1; -\frac{1}{3}\right)$. Определите, в каких точках она пересекает прямую $y = -27$.

6.12. 1) Парабола $y = 2x^2 + c$ пересекает ось x в точке $(-\sqrt{3}; 0)$. Найдите значение c и определите, пересекает ли эта парабола прямую $y = -10$.

2) Парабола $y = -3x^2 + c$ пересекает ось x в точке $(\sqrt{2}; 0)$. Найдите значение c и определите, пересекает ли эта парабола прямую $y = 10$.

6.13. 1) Парабола $y = ax^2 + c$ с вершиной в точке $A(0; -3)$ проходит через точку $B(6; 15)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?

2) Парабола $y = ax^2 + c$ с вершиной в точке $C(0; 5)$ проходит через точку $B(4; -3)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?

6.14. 1) При каких значениях a парабола

$$y = ax^2 - 2x - 3$$

пересекает ось x в двух точках и ее ветви направлены вниз?

2) При каких значениях a парабола

$$y = ax^2 - 3x + 1$$

пересекает ось x в двух точках и ее ветви направлены вверх?

6.15. 1) Парабола $y = -x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точке $(-2; 0)$, а ось ординат в точке $(0; 8)$. Определите координаты второй точки пересечения параболы с осью абсцисс.

2) Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точке $(-1; 0)$, а ось ординат в точке $(0; -5)$. Определите координаты второй точки пересечения параболы с осью абсцисс.

6.16. 1) При каких значениях k парабола

$$y = x^2 + x - 1$$

и прямая $y = kx - 2$ не пересекаются?

2) Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx - 7$ пересекает параболу $y = x^2 + 2x - 3$ в двух точках.

6.17. 1) В одной системе координат постройте прямую $y = x$ и окружность с центром в начале координат и радиусом 3. Определите координаты их точек пересечения.

2) В одной системе координат постройте прямую $y = -x$ и окружность с центром в начале координат и радиусом 3. Определите координаты их точек пересечения.

6.18. 1) Окружность с центром в начале координат проходит через точку $A(-1;\ 3)$. Проходит ли эта окружность через точку $B(\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$?

2) Окружность с центром в начале координат проходит через точку $A(3; \sqrt{7})$. Проходит ли эта окружность через точку $B(-2{,}5;\ 3)$?

6 баллов

6.19. 1) Прямая проходит через точку (0; 3) и касается гиперболы $y = \frac{3}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

2) Прямая проходит через точку (0; −1) и касается гиперболы $y = \frac{1}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

6.20. 1) Прямая $3x + 2y = c$, где c — некоторое число, касается гиперболы $y = \frac{6}{x}$ в точке с положительными координатами. Найдите координаты точки касания.

2) Прямая $2x - 3y = c$, где c — некоторое число, касается гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ в точке с отрицательной абсциссой. Найдите координаты точки касания.

6.21. 1) Прямая, пересекающая ось ординат в точке (0; −2), касается параболы $y = x^2 - 3x + 2$ в точке, расположенной во второй координатной четверти. В какой точке она пересекает ось абсцисс?

2) Прямая, пересекающая ось ординат в точке (0; 2), касается параболы $y = x^2 + x + 3$ в точке, расположенной в первой координатной четверти. В какой точке она пересекает ось абсцисс?

6.22. 1) Известно, что прямая, параллельная прямой $y = 6x$, касается параболы $y = x^2$. Вычислите координаты точки касания.

2) Известно, что прямая, параллельная прямой $y = -4x$, касается параболы $y = x^2 + 1$. Вычислите координаты точки касания.

6.23. 1) При каких значениях c окружность $x^2 + y^2 = 8$ и прямая $x + y = c$ пересекаются в двух точках?

2) При каких значениях c окружность $x^2 + y^2 = 18$ и прямая $x - y = c$ не пересекаются?

6.24. 1) Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Найдите координаты точки касания.

2) Прямая $y = 3x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 10$ в точке с отрицательной абсциссой. Найдите координаты точки касания.

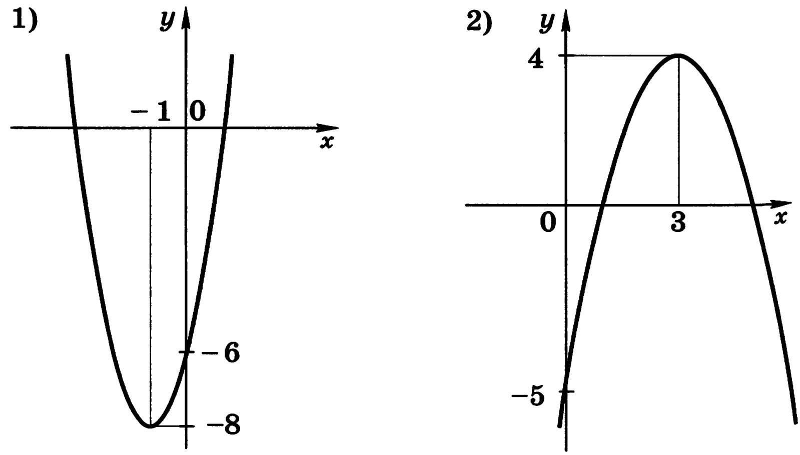
6.25. 1) Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $K(0;\ 4)$, $L(1;\ -1)$ и $M(2;\ -4)$. Найдите координаты ее вершины.

2) Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(0;\ -5)$, $B(3;\ 10)$ и $C(-3;\ -2)$. Найдите координаты ее вершины.

6.26. 1) Запишите уравнение параболы, если известно, что она проходит через точки $(0;\ 2)$ и $(-2;\ -4)$ и ее осью симметрии является прямая $x = 2$.

2) Запишите уравнение параболы, если известно, что она проходит через точки $(0;\ -1)$ и $(4;\ 7)$ и ее осью симметрии является прямая $x = -2$.

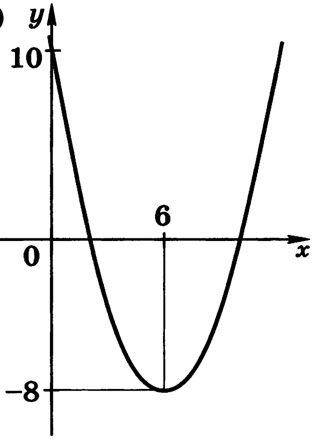
6.27. 1) Найдите координаты точек, в которых парабола, изображенная на рисунке 1, пересекает ось x.

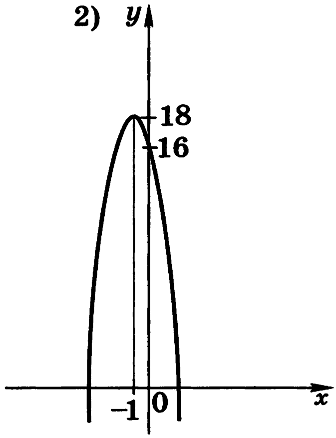


2) Найдите координаты точек, в которых парабола, изображенная на рисунке 2, пересекает ось x.

6.28. 1) На рисунке 1 изображена парабола. Запишите уравнение параболы, симметричной данной относительно оси ординат.

2) На рисунке 2 изображена парабола. Запишите уравнение параболы, симметричной данной относительно оси ординат.

1) 

2) 

6.29. 1) При каких значениях n парабола

$$y = -x^2 + (n - 1)x + n$$

целиком расположена ниже прямой $y = 1$?

2) При каких значениях m парабола

$$y = x^2 + (m + 1)x + m$$

целиком расположена выше прямой $y = -4$?

6.30. 1) Найдите значения p, при которых вершина параболы $y = x^2 - 2px + p + 2$ расположена во второй четверти.

2) Найдите значения p, при которых вершина параболы $y = x^2 + 2px - 2p + 3$ расположена в четвертой четверти.

6.31. 1) Найдите значения m, при которых парабола $y = (x - m)^2 - 9$ пересекает ось абсцисс в точках, расположенных по разные стороны от начала координат.

2) Найдите значения m, при которых парабола $y = (x - m)^2 - 1$ пересекает ось абсцисс в точках, расположенных по одну сторону от начала координат.

6.32. 1) При каких значениях p вершины парабол
$$y = x^2 - 2px - 1 \text{ и } y = -x^2 + 4px + p$$
расположены по разные стороны от оси x?

2) При каких значениях m вершины парабол
$$y = -x^2 - 6mx + m \text{ и } y = x^2 - 4mx - 2$$
расположены по одну сторону от оси x?

6.33. 1) При каких значениях a точки $A(4;\ a)$ и $B(4;\ -3)$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой $2x + y = 3$?

2) При каких значениях a точки $A(2;\ -8)$ и $B(2;\ a)$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой $2x + y = -3$?

6.34. 1) Найдите все значения a, при которых точка пересечения прямых $y = 2x + 1$ и $y = a - 5x$ находится в первой координатной четверти.

2) Найдите все значения a, при которых точка пересечения прямых $y = 2 - 3x$ и $y = a + 2x$ находится во второй координатной четверти.

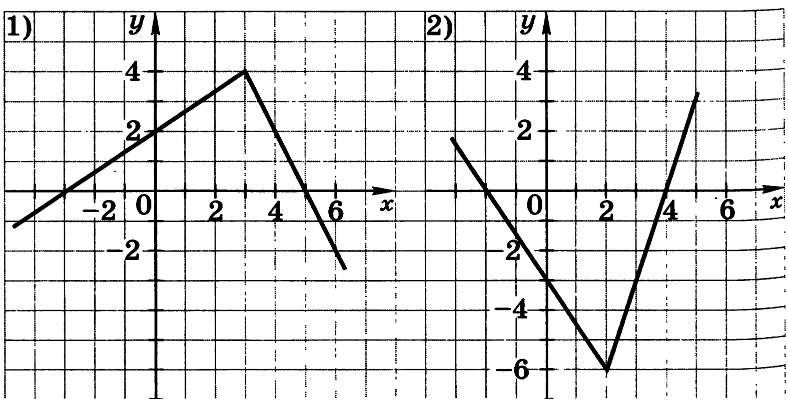
6.35. 1) Найдите значение b, при котором точка пересечения прямых $x - y = b$ и $0{,}2y - x = 3$ лежит на оси абсцисс.

2) Найдите значение a, при котором точка пересечения прямых $x + y = a$ и $x - 0{,}3y = 5$ лежит на оси абсцисс.

6.36. 1) Найдите значение m, при котором точки $A(-3;\ 15)$, $B(9;\ -5)$ и $C(24;\ m)$ лежат на одной прямой.

2) Найдите значение a, при котором точки $A(a;\ -36)$, $B(12;\ -4)$ и $C(-3;\ -14)$ лежат на одной прямой.

6.37. Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.



6.38. 1) Найдите все положительные значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y=\begin{cases} 1, \text{ если } |x| \leqslant 3 \\ -2x-5, \text{ если } x<-3 \\ 2x-5, \text{ если } x>3. \end{cases}$$

2) Найдите все отрицательные значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y=\begin{cases} 2, \text{ если } |x| \leqslant 2 \\ -3x-4, \text{ если } x<-2 \\ 3x-4, \text{ если } x>2. \end{cases}$$

6.39. 1) Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трех точках ломаную, заданную условиями:

$$y=\begin{cases} 1, \text{ если } |x| \leqslant 2 \\ 2x-3, \text{ если } x>2 \\ 2x+5, \text{ если } x<-2. \end{cases}$$

2) Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трех точках ломаную, заданную условиями:

$$y=\begin{cases} 2, \text{ если } |x| \leqslant 2 \\ -2x+6, \text{ если } x>2 \\ -2x-2, \text{ если } x<-2. \end{cases}$$

6.40. 1) Найдите все положительные значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y=\begin{cases} x-2, \text{ если } x<6 \\ 10-x, \text{ если } x \geqslant 6. \end{cases}$$

2) Найдите все отрицательные значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y=\begin{cases} x-4, \text{ если } x \geqslant 3 \\ 2-x, \text{ если } x<3. \end{cases}$$

6.41. 1) Найдите все значения p, при которых прямая $y = x + p$ пересекает график функции $y=\frac{|x|}{x}$ в двух точках.

2) Найдите все значения p, при которых прямая $y = x + p$ пересекает график функции $y=\frac{2|x|}{x}$ в двух точках.

6.42. 1) Прямая $y = -2x + 7$ пересекает прямую $y = x$ и ось абсцисс в точках A и B соответственно. Найдите площадь треугольника ABO, где O — начало координат.

2) Прямая $y = 3x + 6$ пересекает прямую $y = -x$ и ось абсцисс в точках K и N соответственно. Найдите площадь треугольника KON, где O — начало координат.

6.43. 1) Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y=\frac{1}{3}x+4$, $y = -2{,}5x + 12{,}5$ и осью абсцисс.

2) Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y=\frac{1}{3}x-7$, $y = -2{,}5x + 10$ и осью ординат.

6.44. 1) При каких значениях p прямая

$$y = 0{,}5x + p$$

образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 81?

2) При каких значениях p прямая

$$y = px + 2$$

образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 16?

6.45. 1) Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку (3; 0) и образует в первой четверти с осями координат треугольник, площадь которого равна 27.

2) Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку (0; 3) и образует во второй четверти с осями координат треугольник, площадь которого равна 36.

6.46. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1) $9x^2 + 6x + y = 1$; 2) $x^2 - 4x + 4y^2 = 1$.

6.47. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1) $(y - x)(xy - 1) = 0$; 2) $(x^2 - 2y)(x^2 - 1) = 0$.

6.48. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1) $\dfrac{xy-1}{y-x} = 0$; 2) $\dfrac{x^2-2y}{x^2-1} = 0$.

6.49. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2} = 0$; 2) $\dfrac{x^2+y^2-9}{x^2-y^2} = 0$.

6.50. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1) $\dfrac{2y-x}{(x-2)^2+(y-1)^2} = 0$; 2) $\dfrac{y-x^2}{(x+2)^2+(y-4)^2} = 0$.

7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Задания этого раздела направлены на проверку умений:

— решать задачи с применением формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий;

— применять аппарат уравнений и неравенств при решении задач на прогрессии.

2 балла

7.1. 1) Пятый член арифметической прогрессии равен 8,4, а ее десятый член равен 14,4. Найдите пятнадцатый член этой прогрессии.

2) Четвертый член арифметической прогрессии равен 4,5, а ее двенадцатый член равен −12. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

7.2. 1) Число −3,8 является восьмым членом арифметической прогрессии (a_n), а число −11 является ее двенадцатым членом. Является ли членом этой прогрессии число −30,8?

2) Число 10,4 является шестым членом арифметической прогрессии (a_n), а число 5,8 — ее шестнадцатым членом. Является ли членом этой прогрессии число 6,2?

7.3. 1) Арифметическая прогрессия задана условиями: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5$. Найдите номер члена этой прогрессии, равного 143.

2) Арифметическая прогрессия задана условиями: $a_1 = 31$, $a_{n+1} = a_n - 3$. Найдите номер члена этой прогрессии, равного −80.

7.4. 1) Первый член арифметической прогрессии равен 6, а ее разность равна 4. Начиная с какого номера члены этой прогрессии больше 258?

2) Первый член арифметической прогрессии равен 376, а ее разность равна −6. Начиная с какого номера члены этой прогрессии меньше 100?

7.5. 1) Сколько положительных членов в арифметической прогрессии 87,4; 82,8; ...?

2) Сколько отрицательных членов в арифметической прогрессии −37,8; −35,1; ...?

7.6. 1) Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел от 60 до 110 включительно.

2) Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел от 50 до 120 включительно.

7.7. 1) Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 120?

2) Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 105?

7.8. 1) Сколько последовательных натуральных нечетных чисел, начиная с 1, нужно сложить, чтобы получить сумму, равную 729?

2) Сколько последовательных натуральных четных чисел, начиная с 2, нужно сложить, чтобы получить сумму, равную 324?

7.9. 1) В геометрической прогрессии

$$b_{12} = 3^{15} \text{ и } b_{14} = 3^{17}.$$

Найдите b_1.

2) В геометрической прогрессии

$$b_8 = 2^{-12} \text{ и } b_{10} = b^{-14}.$$

Найдите b_1.

7.10. 1) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если ее четвертый член равен $\frac{1}{24}$, знаменатель равен $\frac{1}{2}$.

2) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если ее пятый член равен $\frac{3}{4}$, а знаменатель равен -2.

4 балла

7.11. 1) В арифметической прогрессии $a_5 = -150$, $a_6 = -147$. Найдите номер первого положительного члена этой прогрессии.

2) В арифметической прогрессии $a_6 = 160$, $a_7 = 156$. Найдите номер первого отрицательного члена этой прогрессии.

7.12. 1) Укажите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии 22,7; 21,4; ... .

2) Укажите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии −15,1; −14,4; ... .

7.13. 1) Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии −7,1; −6,3; ... .

2) Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 6,3; 5,8; ... .

7.14. 1) Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_6 = 14$, $a_{10} = 20$ и $a_{16} = 28$?

2) Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_8 = 50$, $a_{12} = 44$ и $a_{20} = 32$?

7.15. 1) Между числами 6 и 17 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.

2) Между числами 12 и 26 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.

7.16. 1) Арифметическая прогрессия содержит 12 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 78, а на нечетных местах равна 90. Найдите первый член и разность прогрессии.

2) Арифметическая прогрессия содержит 10 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 55, а на нечетных местах равна 40. Найдите первый член и разность прогрессии.

7.17. 1) В арифметической прогрессии сумма первых n членов определяется формулой $S_n = 2n^2 + 7n$. Найдите пятый член прогрессии.

2) В арифметической прогрессии сумма первых n членов определяется формулой $S_n = 3n^2 - 5n$. Найдите четвертый член прогрессии.

7.18. 1) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна нулю, а сумма первых четырех членов равна 1.

2) Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, если сумма первых четырех ее членов равна 3, а сумма первых пяти членов равна 5.

7.19. 1) Какое наибольшее число последовательных нечетных чисел, начиная с 1, можно сложить, чтобы получившаяся сумма осталась меньше 300?

2) Какое наименьшее число последовательных нечетных чисел, начиная с 1, нужно сложить, чтобы получившаяся сумма оказалась больше 500?

7.20. 1) Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 150.

2) Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 5 и не превосходящих 300.

7.21. 1) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые не делятся на 6.

2) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые не делятся на 7.

7.22. 1) Найдите сумму членов арифметической прогрессии с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n = 3n + 5$.

2) Найдите сумму членов арифметической прогрессии с двадцать пятого по тридцать пятый включительно, если $a_n = 4n + 2$.

7.23. 1) Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $b_2 = -6$, $b_5 = 48$ и $b_7 = 192$?

2) Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $b_2 = 12$, $b_5 = \frac{3}{2}$ и $b_7 = \frac{3}{4}$?

7.24. 1) Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

2) Между числами 3 и 12 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

7.25. 1) В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 45, а сумма второго и третьего членов равна 30. Найдите три члена этой прогрессии.

2) В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 140, а сумма второго и третьего членов равна 105. Найдите эти три члена прогрессии.

7.26. 1) В геометрической прогрессии (b_n), знаменатель которой — число положительное, $b_1 \cdot b_2 = 27$, а $b_3 \cdot b_4 = \frac{1}{3}$. Найдите эти четыре члена прогрессии.

2) В геометрической прогрессии (b_n), знаменатель которой — число отрицательное, $b_1 \cdot b_2 = -\frac{1}{2}$, а $b_3 \cdot b_4 = -8$. Найдите эти четыре члена прогрессии.

7.27. 1) Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

2) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

7.28. 1) Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

2) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен −4. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

6 баллов

7.29. 1) Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что $a_5 + a_9 = 40$. Найдите

$$a_3 + a_7 + a_{11}.$$

2) Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что $a_4 + a_6 = 38$. Найдите

$$a_2 + a_5 + a_8.$$

7.30. 1) Сумма четвертого и десятого членов арифметической прогрессии равна 10. Найдите сумму первых тринадцати ее членов.

2) Сумма третьего и тринадцатого членов арифметической прогрессии равна 11. Найдите сумму первых пятнадцати ее членов.

7.31. 1) Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии на 32 меньше суммы следующих четырех ее членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии меньше суммы следующих десяти ее членов?

2) Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 200 больше суммы следующих пяти ее членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии больше суммы следующих десяти ее членов?

7.32. 1) Найдите сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

$$3,\ 8,\ 13,\ \ldots \text{ и } 4,\ 11,\ 18,\ \ldots .$$

2) Найдите сумму первых 10 совпадающих членов двух арифметических прогрессий:

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots \text{ и } 1,\ 10,\ 19,\ \ldots .$$

7.33. Решите уравнение:

1) $(x + 1) + (x + 5) + (x + 9) + \ldots + (x + 157) = 3200$;

2) $(x + 248) + (x + 243) + (x + 238) + \ldots + (x + 3) = 6225$.

7.34. Вычислите сумму:

1) $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$;

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + 99^2 - 100^2$.

7.35. 1) Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена $a_n = 7n - 36$. Какое наименьшее значение может принимать сумма

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n?$$

2) Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена $a_n = 34 - 5n$. Какое наибольшее значение может принимать сумма

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n?$$

7.36. 1) Дана функция $f(x) = 2x + 1$. Найдите сумму $f(1) + f(3) + \ldots + f(101)$.

2) Дана функция $f(x) = 3x - 1$. Найдите сумму $f(0) + f(2) + \ldots + f(100)$.

7.37. 1) Найдите сумму всех четных трехзначных чисел, не делящихся на 3.

2) Найдите сумму всех четных трехзначных чисел, не делящихся на 5.

7.38. 1) Найдите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 4 и на 6.

2) Найдите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 6 и на 9.

7.39. 1) Сколько существует натуральных трехзначных чисел, которые делятся только на одно из чисел 4 или 5?

2) Сколько существует натуральных трехзначных чисел, которые делятся только на одно из чисел 5 или 6?

7.40. 1) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

2) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

7.41. 1) В арифметической прогрессии среднее арифметическое первых десяти ее членов равно 20. Найдите первый член и разность этой прогрессии, если известно, что они являются числами натуральными.

2) В арифметической прогрессии среднее арифметическое первых восьми ее членов равно 23. Найдите первый член и разность этой прогрессии, если известно, что они являются числами натуральными.

7.42. 1) Числа $\sqrt{7}+3$ и $\sqrt{2}$ являются четвертым и седьмым членами геометрической прогрессии. Найдите сумму четвертого и десятого членов этой прогрессии.

2) Числа $\sqrt{13}+4$ и $\sqrt{3}$ являются вторым и седьмым членами геометрической прогрессии. Найдите сумму второго и двенадцатого членов этой прогрессии.

7.43. 1) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 112, а сумма следующих трех ее членов равна 14. Найдите седьмой член прогрессии.

2) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 9, а сумма следующих трех ее членов равна -72. Найдите пятый член прогрессии.

7.44. 1) Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 3069?

2) Разность четвертого и первого членов геометрической прогрессии равна 52, а разность пятого и второго членов равна 156. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 242?

7.45. 1) Сумма трех чисел, составляющих убывающую арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго отнять 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

2) Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 63. Если к первому числу прибавить 10, ко второму числу прибавить 3, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

7.46. 1) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Чему равен знаменатель q этой прогрессии, если известно, что $|q| < 1$?

2) Три положительных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если последнее из них уменьшить вдвое, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель этой прогрессии.

7.47. 1) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $d = 6$; в геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $q = \sqrt{2}$. Выясните, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.

2) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии $a_1 = 6$, $d = 2$; в геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $q = \sqrt{3}$. Выясните, что больше: сумма первых восьми членов арифметической прогрессии или сумма первых шести членов геометрической прогрессии.

7.48. 1) Три различных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b$, $b + c$, $a + c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

2) Три положительных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a - b$, $b + c$, $b - c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

8. Текстовые задачи

Задания этого раздела направлены на проверку умений решать текстовые задачи, используя как арифметические способы рассуждений, так и алгебраический метод (составление выражений, уравнений, систем), в том числе работать с алгебраической моделью, в которой число переменных превосходит число уравнений.

2 балла

8.1. 1) Николай и Андрей живут в одном доме. Николай вышел из дома и направился к школе. Через 4 мин после него из дома вышел Андрей и догнал своего друга у школы. Найдите расстояние от дома до школы, если Николай шел со скоростью 60 м/мин, а скорость Андрея 80 м/мин.

2) Мотоцикл, движущийся по шоссе со скоростью 60 км/ч, миновал пост ДПС. Через час мимо этого поста проехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от поста ДПС автомобиль догнал мотоцикл, если оба они ехали без остановок?

8.2. 1) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от пункта A. Найдите скорость каждого, если известно, что пешеход, вышедший из A, шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем другой пешеход, и сделал в пути 30-минутную остановку.

2) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 34 км, выехали одновременно навстречу друг другу два мотоциклиста. Мотоциклист, выехавший из A, ехал со скоростью, на 8 км/ч большей скорости другого мотоциклиста, и сделал в пути получасовую остановку. Найдите скорость каждого, если известно, что они встретились в 10 км от пункта A.

8.3. 1) Группа туристов отправляется на лодке от лагеря по течению реки с намерением вернуться обратно через 5 ч. Скорость течения реки 2 км/ч, собственная скорость лодки 8 км/ч. На какое наибольшее расстояние по реке они могут отплыть, если перед возвращением они планируют пробыть на берегу 3 ч?

2) Рыболов отправляется на лодке от пристани против течения реки с намерением вернуться назад через 5 ч. Перед возвращением он хочет пробыть на берегу 2 ч. На какое наибольшее расстояние он

может отплыть, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

8.4. 1) Лодка может проплыть 15 км по течению реки и еще 6 км против течения за то же время, за какое плот может проплыть 5 км по этой реке. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки 8 км/ч.

2) Катер проплывает 20 км против течения реки и еще 24 км по течению за то же время, за какое плот может проплыть по этой реке 9 км. Скорость катера в стоячей воде равна 15 км/ч. Найдите скорость течения реки.

8.5. 1) Для сада выделен прямоугольный участок земли. Длина изгороди вокруг сада окажется меньше, если участок при той же площади будет иметь квадратную форму. Для этого надо одну сторону участка увеличить на 48 м, а другую уменьшить на 60 м. Какова сторона квадратного участка?

2) Для школьной площадки выделен прямоугольный участок земли. Длина ограды вокруг площадки окажется меньше, если участок при той же площади будет иметь квадратную форму. Для этого надо одну сторону участка увеличить на 18 м, а другую уменьшить на 27 м. Какова сторона квадратного участка?

8.6. 1) Длина детской площадки прямоугольной формы на 5 м больше ее ширины. Длину площадки увеличили на 2 м, а ширину — на 5 м, при этом ее площадь увеличилась на 280 м^2. Найдите площадь новой детской площадки.

2) Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы, длина которого на 25 м больше ширины. При утверждении плана застройки длину участка увеличили на 5 м, а ширину — на 4 м, в результате площадь участка увеличилась на 300 м^2. Найдите площадь образовавшейся строительной площадки.

4 балла

8.7. 1) Из города A в город B, расстояние между которыми равно 300 км, выехал автобус. Через 20 мин навстречу ему из B в A выехал автомобиль и через 2 ч после выезда встретил автобус. С какой скоростью ехал автомобиль, если известно, что она была на 20 км/ч больше скорости автобуса?

2) Из города A в город B, расстояние между которыми 205 км, выехал автобус. Через 15 мин навстречу ему из B в A выехал мотоциклист и встретил автобус через 1 ч после выезда. С какой скоростью ехал автобус, если его скорость на 20 км/ч больше скорости мотоциклиста?

8.8. 1) Два пешехода должны выйти навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 20 км. Если первый выйдет на полчаса раньше второго, то он встретит второго пешехода через 2,5 ч после своего выхода. Если второй выйдет на 1 ч раньше первого, то он встретит первого пешехода через 2 ч 40 мин после своего выхода. Какова скорость каждого пешехода?

2) Из двух пунктов, расстояние между которыми 36 км, должны выехать навстречу друг другу два велосипедиста. Если первый велосипедист отправится в путь на 1 ч раньше второго, то он встретит его через 1 ч 48 мин после своего выезда. Если второй отправится в путь на 1 ч раньше первого, то он встретит первого через 1 ч 36 мин после своего выезда. Найдите скорость каждого велосипедиста.

8.9. 1) Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть к поезду на железнодорожную станцию. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин, а если поедет на мопеде со скоростью 40 км/ч, то приедет за 2 ч до отхода поезда. Чему равно расстояние от лагеря до станции?

2) Болельщик хочет успеть на стадион к началу матча. Если он пойдет из дома пешком со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 1 ч, а если поедет на велосипеде со скоростью 10 км/ч, то приедет за 30 мин до начала матча. Чему равно расстояние от дома до стадиона?

8.10. 1) Путь от поселка до озера идет сначала горизонтально, а затем в гору. От поселка до озера велосипедист доехал за 1 ч, а обратно за 46 мин. Его скорость на горизонтальном участке была равна 12 км/ч, на подъеме — 8 км/ч, а на спуске — 15 км/ч. Найдите расстояние от поселка до озера.

2) Путь от пансионата до почты, который идет сначала в гору, а потом под гору, пешеход прошел за 1 ч 40 мин, а обратный путь — за 2 ч 20 мин. В гору он шел со скоростью 3 км/ч, а под гору — со скоростью 6 км/ч. Найдите расстояние от пансионата до почты.

8.11. 1) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автобус и автомобиль. В пути автомобиль сделал остановку на 3 мин, но в пункт B прибыл на 7 мин раньше автобуса. Найдите скорости автомобиля и автобуса, если известно, что скорость автобуса в 1,2 раза меньше скорости автомобиля.

2) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 80 км, одновременно выехали два автобуса. В пути один из автобусов сделал остановку на 15 мин, но в пункт B прибыл на 5 мин раньше другого. Известно, что его скорость в 1,5 раза больше скорости другого. Найдите скорость каждого автобуса.

8.12. 1) Николай рассчитал, что он сможет хорошо подготовиться к экзамену, если будет решать по 12 задач в день. Однако ежедневно он перевыполнял свою норму на 8 задач и уже за 5 дней до экзамена решил на 20 задач больше, чем планировал первоначально. Сколько задач решил Николай?

2) Ирина рассчитала, что сможет хорошо подготовиться к зачету по английскому языку, если будет заучивать по 24 слова в день. Однако ежедневно она выучивала дополнительно 6 слов, и уже за 2 дня до зачета ей осталось выучить 18 слов. Сколько слов должна была выучить Ирина?

8.13. 1) На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине ее можно сделать на 15 мин быстрее, чем на второй?

2) На двух множительных аппаратах, работающих одновременно, можно сделать копию рукописи за 20 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждом аппарате в отдельности, если известно, что при работе на первом для этого потребуется на 30 мин меньше, чем при работе на втором?

8.14. 1) Фирма A может выполнить некоторый заказ на производство игрушек на 4 дня раньше, чем фирма B. За какое время может выполнить этот заказ каждая фирма, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполняют заказ, в 5 раз больший?

2) Работая вместе, фирмы A и B за 8 дней могут выполнить $\frac{2}{3}$ некоторого заказа. За сколько дней мо-

жет выполнить этот заказ каждая фирма, если известно, что фирма A может выполнить его на 10 дней раньше, чем фирма B?

8.15. 1) Два строителя выложили стену из кирпичей за 14 дней, причем второй присоединился к первому через 3 дня после начала работы. Известно, что первому строителю на выполнение всей работы потребовалось бы на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней мог бы выложить эту стену каждый строитель, работая отдельно?

2) Два мастера оклеили обоями квартиры на этаже в новом доме за 15 дней, причем второй присоединился к первому через 7 дней после начала работы. Известно, что первому мастеру на выполнение всей работы потребовалось бы на 7 дней меньше, чем второму. За какое время мог бы выполнить эту работу каждый мастер, работая отдельно?

8.16. 1) Два автомата разной производительности при одновременном включении упакуют дневную норму коробок с соком за 12 ч. Если первый автомат будет включен 2 ч, а второй — 3 ч, то будет упаковано только 20% всех коробок. За какое время может упаковать дневную норму коробок каждый автомат, работая в отдельности?

2) Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 ч. Если первый оператор будет работать 3 ч, а второй — 12 ч, то они выполнят только 75% всей работы. За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?

8.17. 1) На пост мэра города претендовало три кандидата: Андреев, Борисов, Васильев. Во время выборов за Васильева было отдано в 1,5 раза больше голосов, чем за Андреева, а за Борисова — в 4 раза больше, чем за Андреева и Васильева вместе. Сколько процентов избирателей проголосовало за победителя?

2) На пост губернатора области претендовало три кандидата: Гаврилов, Дмитриев, Егоров. Во время выборов за Дмитриева было отдано в 3 раза меньше голосов, чем за Гаврилова, а за Егорова — в 9 раз больше, чем за Гаврилова и Дмитриева вместе. Сколько процентов избирателей проголосовало за победителя?

8.18. 1) Каждый слушатель на курсах изучает один из языков — английский, немецкий или французский. Отношение числа слушателей, изучающих английский, к числу слушателей, изучающих немецкий, равно 3 : 2, а число изучающих немецкий к числу изучающих французский равно 8 : 5. Сколько процентов слушателей изучает наименее популярный на курсах язык?

2) Каждый учащийся спортивной школы занимается одним из видов борьбы — самбо, дзюдо или карате. Отношение числа самбистов к числу дзюдоистов равно 11 : 6, а числа дзюдоистов к числу каратистов равно 3 : 4. Сколько процентов учащихся занимается наиболее популярным в этой школе видом борьбы?

8.19. 1) Клиент внес 3000 р. на два вклада, один из которых дает годовой доход, равный 8%, а другой — 10%. Через год на двух счетах у него было 3260 р. Какую сумму клиент внес на каждый вклад?

2) В прошлом году в двух крупных городах области было зарегистрировано 900 дорожно-транспортных происшествий (ДТП). В текущем году число ДТП в первом городе уменьшилось на 10%, во втором — на 30%, и всего в этих городах было зарегистрировано 740 случаев ДТП. Сколько дорожно-транспортных происшествий было зарегистрировано в каждом из этих городов в прошлом году?

8.20. 1) В прошлом году на два самых популярных факультета университета было подано 1100 заявлений. В текущем году число заявлений на первый из этих двух факультетов уменьшилось на 20%, а на второй увеличилось на 30%, причем всего было подано 1130 заявлений. Сколько заявлений было подано на каждый из этих факультетов в текущем году?

2) В городской думе заседало 60 депутатов, представляющих две партии. После выборов число депутатов от первой партии увеличилось на 15%, а от второй партии уменьшилось на 20%. Сколько депутатов от каждой партии оказалось в городской думе после выборов, если всего было выбрано 55 депутатов?

8.21. 1) Влажность свежескошенной травы 60%, сена 20%. Сколько сена получится из 1 т свежескошенной травы?

2) Влажность свежих грибов 90%, а сухих — 15%. Сколько сухих грибов получится из 1,7 кг свежих?

8.22. 1) Сколько граммов воды надо добавить к 180 г сиропа, содержащего 25% сахара, чтобы получить сироп, концентрация которого равна 20%?

2) Сколько граммов сахарного сиропа, концентрация которого 25%, надо добавить к 200 г воды, чтобы в полученном растворе содержание сахара составляло 5%?

8.23. 1) Сколько граммов 75%-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15%-ного раствора кислоты, чтобы получить 50%-ный раствор кислоты?

2) Сколько граммов 15%-ного раствора соли надо добавить к 50 г 60%-ного раствора соли, чтобы получить 40%-ный раствор кислоты?

6 баллов

8.24. 1) Один автомобиль проходит в минуту на 200 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 10 с меньше. Сколько километров в час проходит каждый автомобиль?

2) Один пешеход проходит в минуту на 5 м меньше другого, поэтому на прохождение одного километра ему требуется на 50 с больше. Сколько километров в час проходит каждый пешеход?

8.25. 1) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 6 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. После их встречи пешеход, шедший из A, пришел в B через 24 мин, а шедший из B пришел в A через 54 мин. На каком расстоянии от пункта A встретились пешеходы?

2) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 15 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. После их встречи велосипедист, выехавший из A, прибыл в B через 20 мин, а выехавший из B приехал в A через 45 мин. На каком расстоянии от пункта B велосипедисты встретились?

8.26. 1) Турист и велосипедист одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B. Они встретились через 1,5 ч, после чего каждый продолжил движение в своем направлении. Велосипедист прибыл в пункт A через 2 ч после выезда из B. За какое время прошел путь от A до B турист?

2) Автобус отправился из пункта A в пункт B. Одновременно навстречу ему из B в A выехал велосипедист. Через 40 мин они встретились, и каждый продолжил движение в своем направлении. Автобус прибыл в пункт B через 10 мин после встречи. Через какое время после встречи прибыл в A велосипедист?

8.27. 1) Дорога от поселка до станции идет сначала в гору, а потом под гору, при этом ее длина равна 9 км. Пешеход на подъеме идет со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем на спуске. Путь от поселка до станции занимает у него 1 ч 50 мин, а обратный путь занимает 1 ч 55 мин. Определите длину подъема на пути к станции и скорости пешехода на подъеме и на спуске.

2) Дорога длиной 10 км от туристического лагеря до поселка идет сначала под гору, а затем в гору. Турист на спуске идет со скоростью, на 3 км/ч большей, чем на подъеме. Путь от лагеря до поселка занимает у него 2 ч 40 мин, а обратный путь занимает 2 ч 20 мин. Определите длину спуска на пути к поселку и скорости туриста на подъеме и на спуске.

8.28. 1) Автомобиль едет из A в B сначала 2 мин с горы, а затем 6 мин в гору. Обратный же путь он проделывает за 13 мин. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

2) Автобус едет из A в B сначала 5 мин в гору, затем 3 мин с горы. Обратный же путь он проделывает за 16 мин. Во сколько раз быстрее автобус едет с горы, чем в гору?

8.29. 1) Из турбазы в одном направлении выходят три туриста с интервалом в 30 мин. Первый идет со скоростью 5 км/ч, второй — 4 км/ч. Третий турист догоняет второго, а еще через 4 ч догоняет первого. Найдите скорость третьего туриста.

2) Две машины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Скорость первой машины 50 км/ч, а скорость второй на 20% больше. Через час из этого же пункта вслед за ними выехала третья машина, которая догнала вторую на 1 ч 20 мин позже, чем первую. Найдите скорость третьей машины.

8.30. 1) Из деревни на станцию выехал грузовик, а через 30 мин из деревни в том же направлении выехал легковой автомобиль, который догнал грузовик в 30 км от станции. После прибытия на станцию легковой автомобиль сразу же повернул назад и встретил грузовик в 6 км от станции. Сколько времени понадобилось легковому автомобилю, чтобы догнать грузовик?

2) Два маршрутных такси с интервалом в 12 мин отправляются от станции к поселку, причем второе

такси догоняет первое в 30 км от поселка. Прибыв в поселок, второе такси сразу же поворачивает назад и встречает первое в 5 км от поселка. Через сколько минут после выезда со станции второе такси догнало первое?

8.31. 1) Плот проплывает путь из A в B за 12 ч, а моторная лодка — за 3 ч. За какое время моторная лодка преодолеет такое же расстояние в стоячей воде?

2) Плот проплывает путь из A в B за 6 ч, а моторная лодка — путь из B в A за 2 ч. За какое время моторная лодка преодолеет такое же расстояние в стоячей воде?

8.32. 1) Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, отправляется плот. Одновременно навстречу ему из пункта B выходит катер. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению реки. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

2) Из пункта A в пункт B, расположенный выше по течению реки, вышла баржа, собственная скорость которой втрое больше скорости течения. Одновременно навстречу ей из пункта B отправился плот. Встретив плот, баржа сразу повернула назад и пошла вниз по течению реки. Какую часть всего расстояния от A до B останется проплыть плоту к моменту прибытия баржи в пункт A?

8.33. 1) Из пункта A в пункт B отправились одновременно вниз по течению реки плот и катер. Пока плот плыл со скоростью 3 км/ч по течению реки, катер прибыл в пункт B, затем совершил обратный рейс в пункт A и вернулся снова в пункт B одновременно с прибытием плота. Какова собственная скорость катера?

2) Из пункта A в пункт B отправились одновременно вниз по течению реки плот и теплоход. Пока плот плыл со скоростью 2 км/ч по течению реки, теплоход успел прибыть в пункт B и вернуться обратно в пункт A, затем еще раз совершить рейс из пункта A в пункт B и обратно и, наконец, прибыть в пункт B одновременно с плотом. Какова собственная скорость теплохода?

8.34. 1) Одна мельница может смолоть 38 ц пшеницы за 6 ч, другая — 96 ц за 15 ч, третья — 35 ц за 7 ч.

Как распределить 133 т пшеницы между мельницами, чтобы они мололи зерно в течение одного и того же времени?

2) Маша может напечатать 10 страниц за 1 ч, Таня — 4 страницы за 0,5 ч, а Оля — 3 страницы за 20 мин. Как девочкам распределить 54 страницы текста между собой, чтобы они работали в течение одного и того же времени?

8.35. 1) Четыре бригады должны разгрузить вагон с продуктами. Вторая, третья и четвертая бригады вместе могут выполнить эту работу за 4 ч; первая, третья и четвертая — за 3 ч. Если же будут работать только первая и вторая бригады, то вагон будет разгружен за 6 ч. За какое время могут разгрузить вагон все четыре бригады, работая вместе?

2) Для откачивания воды из резервуара имеется четыре насоса. Если включить первый, второй и третий насосы, то работа будет выполнена за 10 мин; если включить первый, третий и четвертый насосы, то та же работа будет выполнена за 12 мин. Если же будут работать только два насоса, второй и четвертый, то работа будет выполнена за 15 мин. За какое время можно откачать воду из резервуара при помощи всех четырех насосов?

8.36. 1) В свежих яблоках 80% воды, а в сушеных — 20%. На сколько процентов уменьшается масса яблок при сушке?

2) Абрикосы при сушке теряют 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат свежие абрикосы, если в сушеных абрикосах 25% воды?

8.37. 1) В лаборатории имеется 2 кг раствора кислоты одной концентрации и 6 кг раствора этой же кислоты другой концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, концентрация которого составляет 36%. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 32% кислоты. Какова концентрация каждого из двух имеющихся растворов?

2) У хозяйки есть 5 кг сахарного сиропа одной концентрации и 7 кг сахарного сиропа другой концентрации. Если эти сиропы смешать, то получится сироп, концентрация которого составляет 35%. Если же смешать равные массы этих сиропов, то получится сироп, содержащий 36% сахара. Какова концентрация каждого из двух имеющихся сиропов?

8.38. 1) При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

2) Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 70%, а во втором — 40% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 50% меди?

8.39. 1) Закупив чайные кружки на складе, магазин стал продавать их по цене, приносящей доход в 50%. Перед Новым годом цена была снижена на 40%. Какая цена меньше: та, по которой магазин закупил кружки, или предновогодняя — и на сколько процентов?

2) Магазин закупил на складе футболки и стал продавать их по цене, приносящей доход в 40%. В конце года цена была снижена на 50%. Какая цена меньше: та, по которой магазин закупил футболки, или их цена в конце года — и на сколько процентов?

8.40. 1) На аукционе одна картина была продана с прибылью 20%, а другая — с прибылью 50%. Общая прибыль от продажи двух картин составила 30%. У какой картины первоначальная цена была выше и во сколько раз?

2) Стоимость путевки в пансионат складывается из стоимости питания и проживания. В связи с тем что питание в пансионате подорожало на 50%, а проживание подорожало на 25%, стоимость путевки увеличилась на 40%. За что платили больше до подорожания: за питание или проживание — и во сколько раз?

8.41. 1) Апельсины подешевели на 30%. Сколько апельсинов можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 2,8 кг?

2) Цена на фрукты возросла на 15%, за счет чего на сумму в 230 р. было приобретено фруктов на 3 кг меньше. На сколько рублей возросла цена 1 кг фруктов?

8.42. 1) Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 2000 р., а окончательная 1805 р.?

2) Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 6000 р., а окончательная 6615 р.?

8.43. **1)** Вчера число учеников, присутствовавших на уроках, было в 8 раз больше числа отсутствовавших. Сегодня не пришли еще 2 человека, и оказалось, что число отсутствующих составляет 20% от числа присутствующих. Сколько всего учеников в классе?

2) Вчера число учеников, отсутствовавших на уроках, составляло 25% от числа присутствовавших. Сегодня пришли еще 3 человека, и теперь число отсутствующих в 9 раз меньше числа присутствующих. Сколько всего учеников в классе?

Ответы и указания к разделу II

1. Выражения и их преобразование

1.1. 1) $a(1+a)(a-b)$; 2) $x(x-1)(y+x)$. **1.2.** 1) $(a-1)\times$ $\times(c-1)(c+1)$; 2) $x(x-1)(y-1)$. **1.3.** 1) $(4x-3y)(4x-3y-1)$; 2) $(2c-5a)(2c-5a-1)$. **1.4.** 1) $(2x+y)(1+y-2x)$; 2) $(a-3b)\times$ $\times(1-a-3b)$. **1.5.** 1) $(a-3b+2c)(a+3b-2c)$; 2) $(1-2x-y)\times$ $\times(1+2x+y)$. **1.6.** 1) $\frac{2-x}{2}$; 2) $\frac{2-x}{3}$. **1.7.** 1) $-\frac{x}{x+3}$; 2) $-\frac{x}{x+2}$. **1.8.** 1) $\frac{1-4a}{1+x}$; 2) $\frac{1+y}{6c-1}$. **1.9.** 1) $\frac{xy-3}{y+x}$; 2) $\frac{b+a}{2-ab}$. **1.10.** 1) $\frac{2m(n-2m)}{2m+n}$; 2) $\frac{x(y-x)}{x+y}$. **1.11.** 1) $\frac{y-x}{y}$; 2) $\frac{1}{(a+b)^2}$. **1.12.** 1) $\frac{c}{c-2}$; 2) $\frac{y}{y-4}$. **1.13.** 1) $\frac{x-2}{x-3}$; 2) $\frac{2x}{2-x}$. **1.14.** 1) -2; 2) -3. **1.15.** 1) 100; 2) 27. **1.16.** 1) 2,4; 2) 4. **1.17.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) 1. **1.18.** 1) $2\sqrt{5}-4$; 2) $25-14\sqrt{2}$. **1.19.** 1) $-2\sqrt{15}$; 2) $2\sqrt{15}$. **1.20.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **1.22.** 1) $(b^2-x)(a-y+1)$; 2) $(ab-c)(a-b+1)$. **1.23.** 1) $(a-b)(x-1)^2$; 2) $(b-c)(y+2)^2$. **1.24.** 1) $(x^2+2)\times$ $\times(x-3)(x+3)$; 2) $(x^2+3)(x-2)(x+2)$. **1.25.** 1) $(x-1)\times$ $\times(x+1)(2x-1)(2x+1)$; 2) $(x-1)(x+1)(3x-2)(3x+2)$. **1.27.** 1) $b-a$; 2) $x-y$. **1.28.** 1) $\frac{5y-x-1}{x+5y+1}$; 2) $\frac{3b-a-2}{3b+a+2}$. **1.29.** 1) $\frac{3a+1}{4-b}$; 2) $\frac{5-b}{2a-1}$. **1.30.** 1) x; 2) 1. **1.31.** 1) $\frac{a}{4a+12}$; 2) $\frac{12-3x}{x}$. **1.32.** 1) $-y$; 2) $-3x$. **1.33.** 1) 4; 2) $\frac{b-2}{4b+4}$. **1.34.** 1) $\frac{3c-1}{c^2}$; 2) $\frac{2a+1}{a^2}$. **1.35.** 1) 4; 2) -12. **1.38.** 1) $-\sqrt{a}-1$; 2) $-\sqrt{b}-1$. **1.39.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1. **1.40.** Указание. Сначала упростите левую часть равенства, а затем избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби. **1.42.** Указание. Умножьте первый множитель на четвертый, второй на третий и сделайте подходящую замену. Ответ. 1) $(x^2+3x-3)(x^2+3x+5)$; 2) $(x^2+x-2)(x^2+x-4)$. **1.43.** Указание. Представьте $2a^2$ в виде суммы a^2+a^2. Ответ. 1) $(a-x)(x+2a-1)$; 2) $(x+y)(x-2y-1)$. **1.44.** Указание. Докажите, что квадратный трехчлен, входящий в состав выражения, положителен при всех x. **1.45.** Указание. Выделите два полных квадрата вида $(x+a)^2$ и $(y+b)^2$. Ответ. 1) При $x=-2$, $y=3$; 2) при $x=5$, y -1. **1.46.** 1) Наибольшее значение выражения, равное 10, достигается при $x=-2$, $y=3$; 2) наибольшее значение выражения, равное 2, достигается при

$x = 1$, $y = 5$. **1.47.** 1) Выражение принимает наименьшее значение, равное -5, при $m = -2$, $n = 3$; 2) выражение принимает наибольшее значение, равное 5, при $m = 3$, $n = 2$. **1.48.** 1) Имеет, оно достигается при $a = b = 2{,}5$; 2) имеет, оно достигается при $a = -1{,}5$, $b = 1{,}5$. **1.49.** 1) 0,6; 2) 6. **1.50.** 1) $\frac{x+3y}{x}$; 2) $\frac{2y+3x}{y}$. **1.51.** 1) $-\sqrt{x}-1$; 2) $1-\sqrt{x}$. **1.52.** 1) $-1\frac{1}{9}$; 2) $-2{,}5$. **1.53.** 1) Является; 2) является. **1.54.** 1) Между 1 и 2; 2) между 3 и 4. **1.55.** 1) Наименьшее значение равно 0, оно достигается при $x = -3$, $y = 2$; 2) наименьшее значение равно 0, оно достигается при $x = 1$, $y = -2$. **1.56.** 1) $x = -1$, $y = -2$; 2) $a = -3$, $b = 1$. **1.57.** 1) Наименьшее значение равно 0, оно достигается при $x = 2$, $y = 5$ и $x = 1$, $y = 2$; 2) наименьшее значение равно 0, оно достигается при $a = 0$, $b = 5$ и при $a = 1$, $b = 4$. **1.58.** 1) Наименьшее значение равно 0, оно достигается при $x = 2$, $y = 1$; 2) наименьшее значение равно 0, оно достигается при $x = -2$, $y = 1$.

2. Уравнения с одной переменной

2.1. 1) 0,5; 1,5; 2) $-1{,}25$; 0,16. **2.2.** 1) $-\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; $-1\frac{1}{4}$. **2.3.** 1) -3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 2) 3; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **2.4.** 1) -1; 1; 2,5; 2) -2; 2; 0,5. **2.5.** 1) $\frac{1}{2}$; -1; $\frac{2}{3}$; 2) 2,5; -1; 0,5. **2.6.** 1) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -2; 2. **2.7.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; -3; 3; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; -2; 2. **2.8.** 1) -3; $\frac{2}{3}$; 2) $-3{,}5$; 2. **2.9.** 1) 2,5; 2) 1. **2.10.** 1) -1; 0,5; 2) $-1{,}5$; 1. **2.11.** 1) -2; 2) 0. **2.12.** 1) 3; 7; 2) -2; -1. **2.13.** 1) -2; 18; 2) -4; 12. **2.14.** 1) $x = 2$; 2) $x = -2$. **2.15.** 1) Между числами 2 и 3; 2) между числами 4 и 5. **2.16.** 1) -6; 1; 2; 3; 2) 1; 3; $-2-\sqrt{7}$; $-2+\sqrt{7}$. **2.17.** 1) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; -2; 2; 0; 2) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -2; 2; 0. **2.18.** Указание. 1) Используйте замену $x^2 + 4x = t$; ответ: -5; 1; -6; 2; 2) 2; 3; 1; 4. **2.19.** 1) -1; 1; 2; 4; 2) -5; -3; 1; 3. **2.20.** 1) 3; 7; 2) -4; 0. **2.21.** 1) 16; 2) 81. **2.22.** 1) Не имеет; 2) не имеет. **2.23.** 1) При $|k| \geqslant 2\sqrt{2}$; 2) при $|k| < 2\sqrt{3}$. **2.24.** 1) $k = \pm 1$; ± 2; 2) $m = \pm 1$; ± 2; ± 3; ± 4. **2.25.** 1) При $c \geqslant 19$; 2) при $c \leqslant 15$. **2.26.** 1) $-\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{2}{3}$. **2.27.** 1) 1,5; 2) $-2{,}5$. **2.28.** 1) -4; 2) -2. **2.29.** 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$. **2.30.** 1) -3; 2) 7. **2.31.** 1) 0; -1; 1; 2) $-\frac{1}{3}$; -1; 1. **2.32.** Указание. Воспользуйтесь заменой. 1) Считайте, например, $x^2 - 4x + 3 = t$; корни уравнения: 0; 4; 2) -7; 1; -5; -1.

2.33. 1) 3; 4; 2) 2; 3. **2.34.** 1) У к а з а н и е. Сгруппируйте множители $x - 2$ и $x + 3$, $x - 1$ и $x + 2$, а затем воспользуйтесь заменой; корни уравнения: -4; 3; 2) -5; 2. **2.35.** 1) При $m = 0$ и $m = 9$; 2) при $k = 0$ и $k = 1$. **2.36.** 1) При $-4 \leqslant a \leqslant 4$; 2) при $-1 \leqslant p \leqslant 1$. **2.37.** 1) При $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$; 2) при $a < 3$ и $a > 1$. **2.38.** 1) При $a < -1$ и $a > 2$; 2) при $a < -3$ и $a > 1$. **2.39.** 1) При $b < -4$; 2) при $k < -2$ и $k > 2$. **2.40.** 1) При $m = 1$; 2) при $m = \frac{1}{4}$. **2.41.** У к а з а н и е. Найдите наименьшее значение каждого трехчлена и выясните, при каком значении x оно достигается. **2.43.** 1) У к а з а н и е. Введите замену $\frac{x^2 + x - 5}{x} = y$; корни уравнения: -5; 1; $-1-\sqrt{6}$; $-1+\sqrt{6}$; 2) -2; 7; $-1-\sqrt{15}$; $-1+\sqrt{15}$. **2.44.** 1) -4; 4; 2) -5; 5. **2.45.** 1) У к а з а н и е. Введите замену $x(x + 2) = t$; корни уравнения: -3; 1; 2) 1; 3; $2\pm\sqrt{3}$. **2.46.** 1) У к а з а н и е. Введите замену $\frac{x^2}{x+2} = t$; корни уравнения: -1; 2; 2) -6; 2. **2.47.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь тождеством $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, затем введите замену; 1) 0,5; 2; 2) $-0{,}5$; 2; $2-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{5}$. **2.48.** 1) У к а з а н и е. Представьте знаменатели дробей в виде многочленов и используйте замену, например $x^2 + 6x + 5 = t$; о т в е т: -7; 1; $\frac{-6-\sqrt{10}}{2}$; $\frac{-6+\sqrt{10}}{2}$; 2) $-2-\sqrt{3}$; $-2+\sqrt{3}$.

3. Системы уравнений

3.1. 1) $(1; -3)$; 2) $(-2; 3)$. **3.2.** 1) $(-3; 1)$; 2) $(1; -4)$. **3.3.** 1) $(1; 2)$; $\left(-\frac{5}{8}; -\frac{7}{16}\right)$; 2) $(2; -3)$; $\left(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{9}\right)$. **3.4.** 1) $(3; -2)$; $(-3; -8)$; 2) $(2; 0)$; $(-1; 3)$. **3.5.** 1) $(5; -2)$; $(2; -5)$; 2) $(6; 2)$; $(2; 6)$. **3.6.** 1) $(2; -2)$; $(-2; -4)$; 2) $(6; 8)$; $(4; 2)$. **3.7.** 1) $(\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; $(-\sqrt{5}; -3\sqrt{5})$; 2) $(2\sqrt{7}; \sqrt{7})$; $(-2\sqrt{7}; -\sqrt{7})$. **3.8.** 1) $(2+\sqrt{3}; 3+4\sqrt{3})$; $(2-\sqrt{3}; 3-4\sqrt{3})$; 2) $(2+\sqrt{5}; 5+2\sqrt{5})$; $(2-\sqrt{5}; 5-2\sqrt{5})$. **3.9.** 1) 3 решения; 2) 3 решения. **3.10.** 1) $(1; -2)$; $(1; 1)$; $(3{,}5; -4)$; 2) $(4; 1)$; $(-3; 1)$; $(-2; 4)$. **3.11.** 1) $(1; 2)$; $(1; -1{,}5)$; $(6; -0{,}5)$; 2) $(0{,}5; -3{,}25)$; $(1; -2)$; $(3; -2)$. **3.12.** 1) $(-2; 4)$; $(8; -1)$; 2) $(4; 6)$; $(-3; -8)$. **3.13.** 1) $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; 2) $(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$; $(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$. **3.14.** 1) $(6; -2)$; $(-2; 6)$; $(-6; 2)$; $(2; -6)$; 2) $(4; 2)$; $(-4; -2)$; $(2; 4)$; $(-2; -4)$. **3.15.** 1) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. **3.16.** 1) $(-6; 3)$;

(3; −6); 2) (3; 1); (−1; −3). 3.17. 1) (2,5; −0,5); 2) (5; 1). 3.18. 1) (−4; −2); (−2; −4); 2) (3; 2); (2; 3). 3.19. 1) (4; −3); (−3; 4); 2) (3; 2); (−2; −3). 3.20. 1) $\left(4; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-4; \frac{1}{2}\right)$; **2)** $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. **3.21. 1) (2; 1); (−2; 1); (2; −1); (−2; −1); 2) (1,5; 0,5); (1,5; −0,5); (−1,5; 0,5); (−1,5; −0,5). 3.22. 1) (6; 1); (1; 6); 2) (6; 1); (−1; −6). 3.23. 1) (2; 2); 2) (3; −3). 3.24. 1) Решений нет; 2) (2; −4). 3.25. 1) При** $p = 3$; **2) при** $p = 5$. **3.26. 1) (−3; −1); (−1; −3); (1; 3); 2) (1; −4); (2; −2); (−2; 2). 3.27. 1)** $x + y + z = 6$; **2)** $x + y + z = 60$. **3.28. 1) (−3; −1); (3; 1); (1; 3); (−1; −3); 2) (2; 2); (−2; −2); (−2; 2); (2; −2). 3.29. 1) (1; 2); (2; 1); 2) (1; −1); (−1; 1); (1; 2); (2; 1). 3.30. 1) (−4,5; 2); (4; 2); 2) (1; 4); (1; −3,5). 3.31. 1)** $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$; **2)** $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. **3.32. 1) (0; 0); (1; 1), (1; −1); 2) (0; 0), (2; 4), (−2; 4). 3.33. 1) При** $b = \pm 3\sqrt{2}$; **2) при** $p < -1$. **3.34. 1) При** $a < -\frac{\sqrt{5}}{5}$; **2) при** $a > \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **3.35. 1) При** $a = -2$; **2) при** $a = -3$. **3.36. 1) 4 решения; 2) 4 решения. 3.37. 1) 3 решения; 2) 3 решения.**

4. Неравенства

4.1. 1) $x \leqslant 2$; **2)** $x \geqslant -3$. **4.2. 1)** $a = 3$; **2)** $x = 2$. **4.3. 1) При** $a = 1$; **2) при** $x = -1$ **и** $x = -2$. **4.4. 1)** $x \geqslant -0{,}8$; **2)** $x \leqslant -2{,}2$. **4.5. 1)** $x \leqslant -4{,}5$; **2)** $x \leqslant -1{,}7$. **4.6. 1)** $x < 0$; **2)** $4 < x < 18$. **4.7. 1)** $x < \frac{2}{3}$ **или** $x > 2$; **2)** $-2 < x < 2{,}5$. **4.8. 1)** $-1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$; **2)** $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 2$. **4.9. 1)** $x \leqslant -\frac{2}{3}$ **или** $x \geqslant 2$; **2)** $\frac{2}{5} \leqslant x \leqslant 4$. **4.10. 1) При** $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$; **2) при** $x \leqslant -2$ **и** $x \geqslant 0$. **4.11. 1)** $-3 \leqslant x \leqslant 1$; **2)** $-2 \leqslant x \leqslant 5$. **4.13. 1)** $\sqrt{11} + \sqrt{13}$; **2)** $\sqrt{14} + \sqrt{15}$. **4.15. 1)** $x < 1{,}5$; **2)** $x < -2{,}5$. **4.16. 1)** $-4 < x < 4$; **2)** $x < -3$ **или** $x > 3$. **4.17. 1)** $x < -4{,}5$ **или** $x > 3$; **2)** $x < -4$ **или** $x > 0{,}4$. **4.18. 1)** x **— любое число; 2)** $\varnothing$. **4.19. 1) При** $0 < x \leqslant 1$ **и** $x \geqslant 3$; **2) при** $x \leqslant -2$ **и** $-1 \leqslant x < 0$. **4.20. 1) −3; −2; 2) −2; −1; 0. 4.21. 1)** $\frac{5}{6} < x < 2$; **2)** $-3 < x < \frac{1}{3}$. **4.22. 1) 1; 2; 3; 5; 2) −2; −1; 0, 1; 3. 4.23. 1)** $a = -5$; **2)** $a = 8$. **4.24. 1)** $-3 \leqslant x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$; **2)** $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. **4.25. 1)** $x \leqslant -2$ **и** $x \neq -3$; $x \geqslant 2\frac{1}{3}$ **и** $x \neq 3$; **2)** $x \leqslant \frac{2}{3}$ **и** $x \neq -2$; $x \geqslant 1$ **и** $x \neq 2$. **4.26. 1)** $x < -3\frac{3}{4}$, $-3\frac{3}{4} < x \leqslant -3$, $x \geqslant 2{,}5$; **2)** $x \leqslant -1{,}5$, $x \geqslant 4$ **и**

$x \neq 5{,}5$. **4.27.** 1) $x \neq -1$, $x \neq 2$; 2) $x \neq 1$, $x \neq -2$. **4.29.** 1) $x = -6$; 2) $x = -17$. **4.30.** 1) $x > 3\frac{1}{4}$; 2) $x < 3\frac{1}{3}$. **4.31.** 1) $x > 2$; 2) $x < -3$. **4.32.** 1) $x < \sqrt{6}-2$, $x > \sqrt{3}-1$; 2) $\sqrt{5}-2 < x < \sqrt{2}-1$. **4.33.** 1) 7; 2) 9; 10. **4.34.** 1) $-2 < x < -1$ или $1 < x < 2$; 2) $x \leqslant -3$, или $-2 \leqslant x \leqslant 2$, или $x \geqslant 3$. **4.35.** 1) $x = -3$; 2) $x = -2$. **4.36.** Указание. Здесь и в заданиях **4.37—4.38** используйте подходящую замену. Например, в задании **4.36** (1) введите замену $y = x^2 + 1$. Ответ. 1) $x \leqslant -3$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant 3$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant 4$. **4.37.** 1) $x < -2$, $x > 0$; 2) $x < 0$, $x > 4$. **4.38.** 1) $-3 < x < -2$, $-1 < x < 0$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $4 \leqslant x \leqslant 5$. **4.39.** 1) $1 < a < 3$; 2) $-2 < p < 3$. **4.40.** 1) $x < \sqrt{3}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6} - 3 < x < \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$. **4.41.** 1) $p > -2$; 2) $a \leqslant 4{,}4$. **4.42.** 1) $11 < m \leqslant 12$; 2) $-3 < m \leqslant -2$. **4.43.** 1) -1; 0; 1; 2) -1; 0; 1; 2. **4.44.** 1) $x < -2$, $0 < x < 1$, $x > 3$; 2) $-2 < x < 0$, $1 < x < 3$.

5. Функции

5.1. 1) Если $0 \leqslant x \leqslant 8$, то $-1 \leqslant y \leqslant 3$; 2) если $0 \leqslant x \leqslant 9$, то $-2 \leqslant y \leqslant 1$. **5.2.** 1) $y < 0$ при $x < 2{,}5$; 2) $y > 0$ при $x < -1{,}5$. **5.3.** 1) $0 \leqslant y \leqslant 1{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $-2 \leqslant y \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 6$. **5.4.** 1) $y_{\text{наиб}} = -1$; 2) $y_{\text{наим}} = 2$. **5.5.** 1) $y < 0$, если $x < -4$ и $x > 0$; 2) $y > 0$, если $x < 0$ и $x > 2$. **5.6.** 1) Область значений — промежуток $[-3; +\infty)$; 2) область значений — промежуток $(-\infty; 2]$. **5.7.** 1) Если $0 \leqslant x \leqslant 4$, то $-4 \leqslant y \leqslant 5$; 2) если $0 \leqslant x \leqslant 3$, то $-3 \leqslant y \leqslant 1$. **5.8.** 1) $(\sqrt{6};0)$, $(-\sqrt{6};0)$; 2) $(\sqrt{3};0)$, $(-\sqrt{3};0)$. **5.9.** 1) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -3]$ и убывает на промежутке $[-3; +\infty)$; 2) функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и возрастает на промежутке $[2; +\infty)$. **5.10.** 1) Функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$; 2) функция убывает на промежутке $[-2; +\infty)$. **5.11.** 1) График — прямая $y = -x + 3$ без точки $(2; 1)$; $y > 0$, если $x < 3$ и $x \neq 2$; 2) график — прямая $y = x - 4$ без точки $(2; -2)$; $y < 0$, если $x < 4$ и $x \neq 2$. **5.12.** 1) График — прямая $y = -\frac{x+2}{4}$ без точки $(2; -1)$; область значений — множество всех чисел, кроме -1; 2) график — прямая $y = -\frac{x-3}{2}$ без точки $(-3; 3)$; область значений — множество всех чисел, кроме 3. **5.13.** 1) Указание. Функцию можно задать формулой $y = x(x + 1)$, где $x \neq 1$. Ее графиком является парабола без точки с абсциссой, равной 1. Ответ. $y > 0$ на промежутках $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. 2) Указание. Функцию можно задать формулой $y = -x(x - 2)$, где $x \neq -2$. Ее график — парабола без точки с абсциссой, равной -2. Ответ. $y < 0$ на промежутках $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$. **5.14.** 1) График — гипербола $y = \frac{2}{x}$ без точки $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$; $y < 2$ при $x > 1$, $x < -4$ и $-4 < x < 0$; 2) график — гипербола $y = -\frac{6}{x}$ без точки $(2; -3)$; $y < 6$ при $x < -1$, $0 < x < 2$, $x > 2$. **5.15.** 1) График изображен на рисунке 1; $f(-10) = -6$; 2) $f(-20) = 7$. **5.16.** 1) График изображен на рисунке 2; функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$; 2) функция возрастает на промежутках $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$. **5.17.** 1) График изображен на рисунке 3; функция убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; 2) функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$. **5.18.** 1) График изображен на рисунке 4; $f(x) \geqslant 0$, если $x = 0$ и $|x| \geqslant 3\frac{1}{3}$; 2) $f(x) > 0$, если $|x| < 3\frac{1}{3}$; и $x \neq 0$.

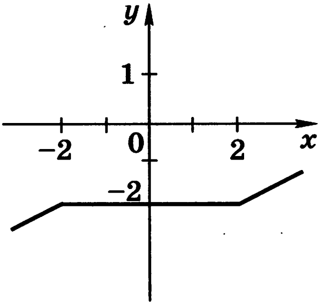


Рис. 1

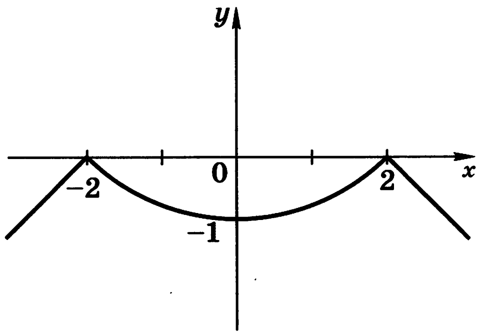


Рис. 2

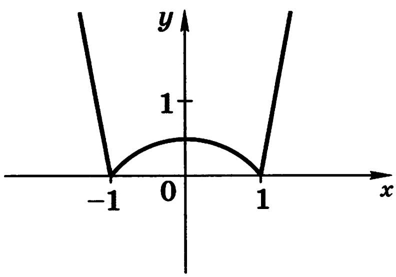


Рис. 3

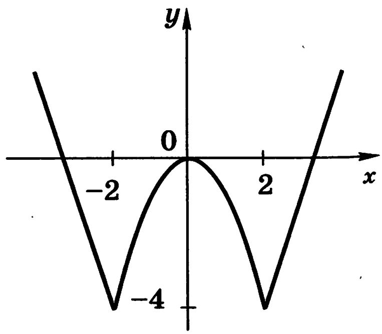


Рис. 4

5.19. 1) График изображен на рисунке 5; $f(x) > 0$, если $|x| < \sqrt{6}$ и $x \neq 0$; 2) $f(x) \geqslant 0$, если $x = 0$ и $|x| \geqslant \sqrt{6}$. **5.20.** 1) График изображен на рисунке 6(1); $y \geqslant 0$, если $x \leqslant -1$ и $x > 0$;
2) график изображен на рисунке 6(2); $y > 0$, если $x < -1$ и $-1 < x < 1$. **5.21.** 1) Прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки при $m = 3$; 2) прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки при $m = -2$. **5.22.** 1) Прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки при $m = 4$ и $m = 0$; 2) прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки при $m = -9$ и $m = 0$. **5.23.** 1) Прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки при $0 < m < 4$; 2) прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки при $-9 < m < 0$. **5.24.** 1) *Указание.* Функцию можно задать формулой $y = -x - 1$, где $x \neq 0$ и $x \neq 2$. *Ответ.* Неравенство $y \leqslant 3$ выполняется при $-4 \leqslant x < 0$, $0 < x < 2$, $x > 2$. 2) *Указание.* Функцию можно задать формулой $y = -x + 1$, где $x \neq 0$ и $x \neq 2$. *Ответ.* Неравенство $y \leqslant 2$ выполняется при $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x < 2$, $x > 2$. **5.25.** *Указание.* 1) Функцию можно задать формулой $y = (x + 1)(x + 3)$, где $x \neq -2$ и $x \neq -4$; 2) функцию можно задать формулой $y = (x + 3)(x - 1)$, где $x \neq 2$ и $x \neq -1$. **5.26.** 1) При $m = 4$ и $m = 3$; 2) таких значений m нет. **5.27.** 1) При $p = -9$ и $p > -8$; 2) при $p = 4$ и $p < 3$. **5.28.** 1) График изображен на рисунке 7(1); прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки при $m = 3$ и $m = -1$; 2) график изображен на рисунке 7(2); прямая $y = m$ имеет с графиком три общие точки при $-6 < m < -2$. **5.29.** 1) При $0 < p < 1$ и при $2 < p < 5$; 2) при $p = -2$ и $0 \leqslant p < 2$.

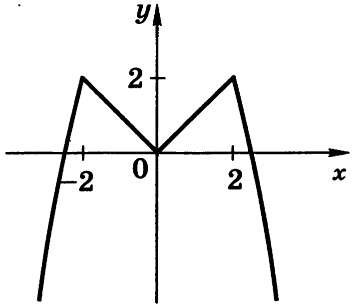


Рис. 5

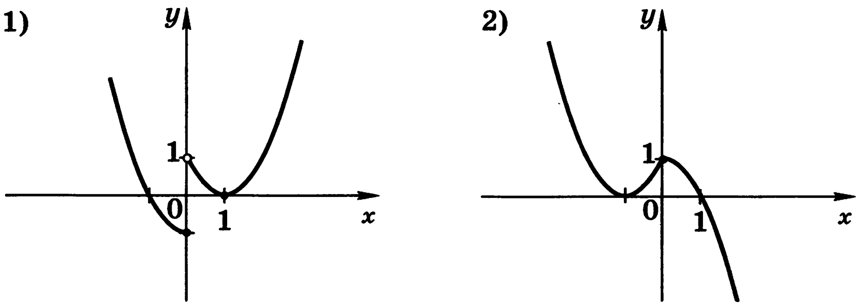


Рис. 6

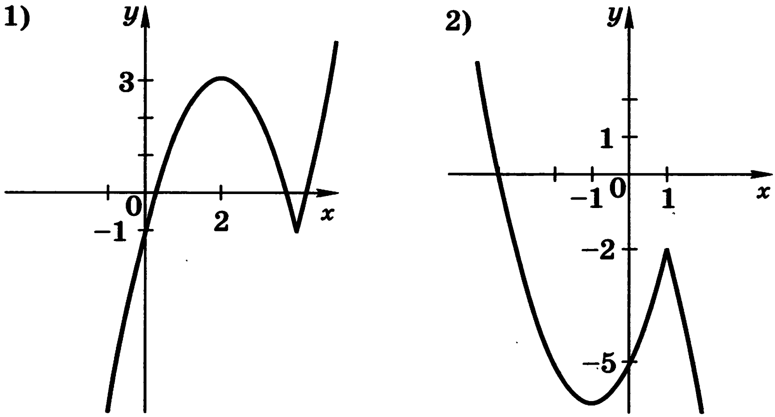


Рис. 7

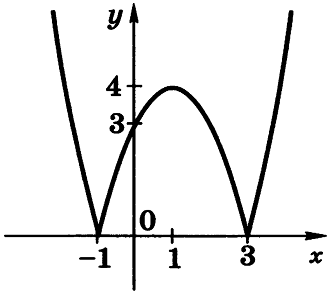


Рис. 8

5.30. 1) $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $C(2;\ 0)$; 2) $M(-2;\ 0)$, $N(-1;\ 0)$, $K(0;\ 2)$.

5.31. 1) $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ -1)$, $C\left(\frac{1}{3};0\right)$; 2) $K(0;\ 1)$, $L\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $M(1;\ 0)$.

5.32. 1) График функции изображен на рисунке 8; прямая $y = m$ может иметь с графиком две общие точки (при $m = 0$ и $m > 4$), три общие точки (при $m = 4$), четыре общие точки (при $0 < m < 4$); 2) прямая $y = m$ может иметь с графиком две общие точки (при $m = 0$ и $m > 9$), три общие точки (при $m = 9$), четыре общие точки (при $0 < m < 9$). **5.33.** 1) График функции изображен на рисунке 9;

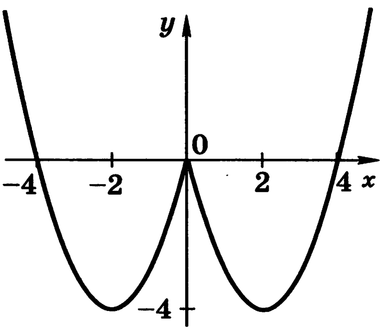


Рис. 9

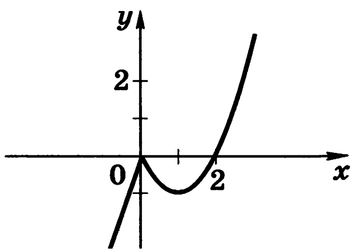


Рис. 10

прямая $y = m$ может иметь с графиком две общие точки (при $m = -4$ и $m > 0$), три общие точки (при $m = 0$), четыре общие точки (при $-4 < m < 0$); 2) прямая $y = m$ может иметь с графиком две общие точки (при $m = 1$ и $m < 0$), три общие точки (при $m = 0$), четыре общие точки (при $0 < m < 1$). **5.34.** Указание. Задайте функцию «кусочно», рассмотрев случаи $x \geqslant 0$ и $x < 0$. 1) График изображен на рисунке 10; прямая $y = p$ может иметь с графиком одну общую точку (при $p > 0$ и $p < -1$), две общие точки (при $p = 0$ и $p = -1$), три общие точки (при $-1 < p < 0$); 2) прямая $y = p$ может иметь с графиком одну общую точку (при $p < -1$ и $p > 1$), две общие точки (при $p = 0$ и $p = 1$), три общие точки (при $0 < p < 1$).

5.35. 1) $(1 - \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2})$, $(1; 1)$; 2) $(-1; -1)$, $(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 3)$.

5.36. 1) $(-1; 3)$, $(-3; 3)$, $(\sqrt{7} - 2; 3)$; 2) $(1; 5)$, $(5; 5)$, $(3 - \sqrt{14}; 5)$.
5.37. 1) Указание. Область определения функции находим из условия $x^2 - 1 \geqslant 0$ и $x \neq 1$; на области определения она задается формулой $y = x + 1$. 2) Указание. Область определения функции находим из условия $4 - x^2 \geqslant 0$ и $x \neq 2$; на области определения она задается формулой $y = -x + 2$. **5.38.** Указание. Для преобразования формулы воспользуйтесь тождеством $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$. **5.39.** 1) Указание. Представьте данную формулу в виде $y = -(\sqrt{x} - 2)^2 + 5$. Ответ. Наибольшее значение функции равно 5, оно достигается при $x = 4$; 2) $y = (\sqrt{x} - 3)^2 - 9$; наименьшее значение функции равно -9, оно достигается при $x = 9$. **5.40.** 1) Указание. Представьте формулу в виде $y = 1 + \frac{5}{x^2 + 5}$. Ответ. 1) $y_{\text{наиб}} = 2$; 2) $y = 1 - \frac{2}{x^2 + 8}$, $y_{\text{наим}} = \frac{3}{4}$.

6. Координаты и графики

6.1. 1) $y = -0{,}4x + 2$; $(5; 0)$; 2) $y = 0{,}5x - 3$; $(6; 0)$. **6.2.** 1) $y = -1{,}5x + 8$; 2) $y = 3{,}6x + 10$. **6.3.** 1) $y = \frac{1}{2}x - 4{,}5$; во II координатной четверти; 2) $y = -2{,}5x - 12$; в I координатной четверти. **6.4.** 1) $a = 1$; пересекает; 2) $b = -1$; не пересекает. **6.5.** 1) $(3; 4)$, $(-2; -2)$, $(4; -2)$; 2) $(-2; -1)$, $(3; 3)$, $(3; -2)$. **6.6.** 1) Проходят; 2) проходят. **6.7.** 1) $y = \frac{1}{3}x - 3$; $(9; 0)$ и $(0; -3)$; 2) $y = -0{,}5x + 2$; $(0; 2)$ и $(4; 0)$. **6.8.** 1) Нет; 2) да. **6.9.** 1) Прямая AB: $y = 5$; прямая BC: $x = 8$; прямая AC: $y = -0{,}5x + 6$;

2) прямая MN: $y = 4$; прямая MP: $x = -1$; прямая NP: $y = 2x - 6$. **6.10.** 1) $(-3; 0)$ и $(3; 0)$; 2) $(1; 0)$ и $(-1; 0)$. **6.11.** 1) $y = \frac{1}{4}x^2$; $(6; 9)$ и $(-6; 9)$; 2) $y = -\frac{1}{3}x^2$; $(9; -27)$ и $(-9; -27)$. **6.12.** 1) $c = -6$; не пересекает; 2) $c = 6$; не пересекает. **6.13.** 1) $(\sqrt{6}; 0)$ и $(-\sqrt{6}; 0)$; 2) $(\sqrt{10}; 0)$ и $(-\sqrt{10}; 0)$. **6.14.** 1) При $-\frac{1}{3} < a < 0$; 2) при $0 < a < 2\frac{1}{4}$. **6.15.** 1) $(4; 0)$; 2) $(5; 0)$. **6.16.** 1) При $-1 < k < 3$; 2) при $k < -2$ и $k > 6$. **6.17.** 1) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; 2) $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. **6.18.** 1) Проходит; 2) не проходит. **6.19.** 1) Указание. Сначала найдите значение k, при котором уравнение $kx + 3 = \frac{3}{x}$ имеет единственное решение. Ответ. 1) $(4; 0)$; 2) $(-4; 0)$. **6.20.** 1) $(2; 3)$; 2) $(-3; 2)$. **6.21.** 1) Указание. Уравнение прямой, пересекающей ось ординат в точке $(0; -2)$, имеет вид $y = kx - 2$; далее составьте уравнение для нахождения общих точек прямой и параболы и определите значения k, при которых оно имеет единственное решение. Ответ. 1) $\left(-\frac{2}{7}; 0\right)$; 2) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. **6.22.** 1) $(3; 9)$; 2) $(-2; 5)$. **6.23.** 1) При $-4 < c < 4$; 2) при $c < -6$ и $c > 6$. **6.24.** 1) $(2; -1)$; 2) $(-3; 1)$. **6.25.** Указание. Сначала составьте уравнение параболы, проходящей через заданные точки. Ответ. 1) $(3; -5)$ 2) $(-1; -6)$ **6.26.** 1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$. **6.27.** 1) Указание. Возможны разные способы составления уравнения параболы; один из них — воспользоваться уравнением вида $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы. Ответ. 1) $(-3; 0)$ и $(1; 0)$; 2) $(1; 0)$ и $(5; 0)$. **6.28.** 1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$; 2) $y = -2x^2 + 4x + 16$. **6.29.** 1) $-3 < n < 1$; 2) $-3 < m < 5$. **6.30.** 1) $p < -1$; 2) $p < -3$. **6.31.** 1) $-3 < m < 3$; 2) $m < -1$, $m > 1$. **6.32.** Указание. Докажите, что вершина параболы $y = x^2 - 2px - 1$ при любых значениях p расположена ниже оси x. Ответ. 1) При $p < -\frac{1}{4}$ и $p > 0$; 2) при $-\frac{1}{9} < m < 0$. **6.33.** 1) При $a < -5$; 2) при $a > -7$. **6.34.** 1) $a > 1$; 2) $a > 2$. **6.35.** 1) $b = -3$; 2) $b = 5$. **6.36.** 1) $m = -30$; 2) $a = -36$. **6.37.** 1) $y = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2, \text{ если } x \leqslant 3 \\ -2x + 10, \text{ если } x > 3; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases}-1{,}5x-3, \text{ если } x\leqslant 2\\ 3x-12, \text{ если } x>2.\end{cases}$ **6.38.** 1) $\frac{1}{3}<k<2$; 2) $-3<k<-1$. **6.39.** 1) $\frac{1}{2}<k<2$; 2) $-2<k<-1$. **6.40.** 1) $0<k<\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}<k<0$. **6.41.** 1) $-1<p\leqslant 1$; 2) $-2<p\leqslant 2$. **6.42.** 1) $S=4\frac{1}{12}$; 2) $S=1{,}5$. **6.43.** 1) $S=42{,}5$; 2) $S=51$. **6.44.** 1) При $p=\pm 9$; 2) при $p=\pm\frac{1}{8}$. **6.45.** 1) $y=-6x+18$; 2) $y=\frac{1}{8}x+3$. **6.46.** Графиком уравнения являются две параллельные прямые: 1) $y=-3x+1$ и $y=-3x-1$; 2) $y=0{,}5x-0{,}5$ и $y=0{,}5x+0{,}5$. **6.47.** 1) График представляет собой объединение гиперболы $xy=1$ и прямой $y=x$; 2) график представляет собой объединение параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ и двух вертикальных прямых $x=1$ и $x=-1$. **6.48.** 1) Гипербола $xy=1$ без точек $(1;\ 1)$ и $(-1;\ -1)$; 2) парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ без точек с абсциссами 1 и -1. **6.49.** 1) Окружность $x^2+y^2=1$ без четырех точек, принадлежащих прямым $y=x$ и $y=-x$; 2) окружность $x^2+y^2=9$ без четырех точек, принадлежащих прямым $y=x$ и $y=-x$. **6.50.** 1) Прямая $y=\frac{1}{2}x$ без точки $(2;\ 1)$; 2) парабола $y=x^2$ без точки $(-2;\ 4)$.

7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

7.1. 1) 20,4; 2) $-28{,}5$. **7.2.** 1) Является; 2) не является. **7.3.** 1) $n=29$; 2) $n=38$. **7.4.** 1) Начиная с номера 65; 2) начиная с номера 48. **7.5.** 1) 19; 2) 14. **7.6.** 1) 4335; 2) 6035. **7.7.** 1) 15 чисел; 2) 14 чисел. **7.8.** 1) 27 чисел; 2) 18 чисел. **7.9.** 1) $b_1=3^4$ или $b_1=-3^4$; 2) $b_1=2^{-5}$ или $b_1=-2^{-5}$. **7.10.** 1) $\frac{21}{32}$; 2) $-\frac{63}{64}$. **7.11.** 1) $n=56$; 2) $n=47$. **7.12.** 1) 0,6; 2) 0,3. **7.13.** 1) $-35{,}1$; 2) 42,9. **7.14.** 1) Не существует; 2) существует. **7.15.** 1) 6; 8,2; 10,4; 12,6; 14,8; 17; 2) 12; 15,5; 19; 22,5; 26. **7.16.** 1) $a_1=25$, $d=-2$; 2) $a_1=-4$, $d=3$. **7.17.** 1) $a_5=25$; 2) $a_4=16$. **7.18.** 1) 17,5; 2) 18. **7.19.** 1) 17 чисел; 2) 23 числа. **7.20.** 1) 3825; 2) 9150. **7.21.** 1) Указание. Из суммы всех натуральных чисел от 1 до 200 вычтите сумму тех из них, которые делятся на 6. Ответ. 1) 16 734; 2) 26 965. **7.22.** 1) 1210; 2) 1342. **7.23.** 1) Существует; 2) не существует.

7.24. 1) $2\sqrt{3}, 6, 6\sqrt{3}$ или $-2\sqrt{3}, 6, -6\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}$ или $-3\sqrt{2}, 6, -6\sqrt{2}$. **7.25.** 1) 27, 18, 12; 2) 80, 60, 45. **7.26.** 1) 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$ или −9; −3; −1; $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; −1; 2; −4 или $-\frac{1}{2}$;1; −2; 4. **7.27.** 1) 765 или 255; 2) 728 или 364. **7.28.** 1) 3280; 2) −2457. **7.29.** 1) 60; 2) 57. **7.30.** 1) 65; 2) 82,5. **7.31.** 1) На 200; 2) на 400. **7.32.** Указание. Совпадающие члены данных прогрессий также составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна наименьшему общему кратному разностей данных прогрессий. Первый совпадающий член двух данных прогрессий можно найти, непосредственно выписав несколько последовательных членов каждой из них. Ответ. 1) 7710; 2) 1810. **7.33.** 1) $x = 1$; 2) $x = -1$. **7.34.** Указание. Преобразуйте выражение, используя формулу разности квадратов. Ответ. 1) 1275; 2) −5050. **7.35.** 1) Указание. S_n принимает наименьшее значение, если $a_n < 0$ и $a_{n+1} \geqslant 0$. Ответ. $S_{\text{наим}} = S_5 = -75$; 2) $S_{\text{наиб}} = S_6 = 99$. **7.36.** 1) 5253; 2) 7599. **7.37.** 1) Указание. Из суммы четных трехзначных чисел надо вычесть сумму трехзначных чисел, кратных 3. Ответ. 1) 164 700; 2) 148 500. **7.38.** 1) 41 400; 2) 27 450. **7.39.** 1) 315; 2) 270. **7.40.** 1) Указание. Все числа такого вида образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 5n - 2$, где $n \in N$. Ответ. 1) 4020; 2) 3775. **7.41.** 1) $a_1 = 11$, $d = 2$; $a_1 = 2$, $d = 4$; 2) $a_1 = 2$, $d = 6$; $a_1 = 9$, $d = 4$; $a_1 = 16$, $d = 2$. **7.42.** 1) 6; 2) 8. **7.43.** 1) 1; 2) 48. **7.44.** 1) 10 членов; 2) 5 членов. **7.45.** 1) 34; 20; 6; 2) 6; 21; 36. **7.46.** 1) $q = 2 - \sqrt{3}$;2) $q = 2 + \sqrt{2}$. **7.47.** 1) Больше сумма первых восьми членов геометрической прогрессии; 2) больше сумма первых шести членов геометрической прогрессии. **7.48.** 1) $q = -2$; 2) $q = \frac{1}{3}$.

8. Текстовые задачи

8.1. 1) 960 м; 2) на расстоянии 180 км. **8.2.** 1) 5 км/ч и 6 км/ч; 2) 32 км/ч и 40 км/ч. **8.3.** 1) На 7,5 км; 2) на 8 км. **8.4.** 1) 2 км/ч; 2) 3 км/ч. **8.5.** 1) 240 м; 2) 54 м. **8.6.** 1) 1680 м^2; 2) 1200 м^2. **8.7.** 1) 80 км/ч; 2) 100 км/ч. **8.8.** 1) 4 км/ч и 5 км/ч; 2) 12 км/ч и 18 км/ч. **8.9.** 1) 60 км; 2) 15 км. **8.10.** 1) 10 км; 2) 8 км. **8.11.** 1) 72 км/ч и 60 км/ч; 2) 80 км/ч и 120 км/ч. **8.12.** 1) 200 задач; 2) 168 слов. **8.13.** 1) За 15 мин и за 30 мин; 2) за 30 мин и за 1 ч. **8.14.** 1) Фирма A за 8 дней, фирма B за 12 дней; 2) за 20 дней и за 30 дней. **8.15.** 1) За 28 дней и за 22 дня; 2) за 21 день и за 28 дней. **8.16.** 1) За 20 ч и за 30 ч; 2) первый оператор за 12 ч, второй — за 24 ч. **8.17.** 1) 80% избирателей; 2) 90% избирателей. **8.18.** 1) 20% слушателей;

2) 44% учащихся. **8.19.** 1) 1000 р. и 2000 р.; 2) 350 и 550. **8.20.** 1) 480 и 650; 2) 23 и 32. **8.21.** 1) 500 кг сена; 2) 200 г сухих грибов. **8.22.** 1) 45 г; 2) 50 г. **8.23.** 1) 42 г; 2) 40 г. **8.24.** 1) 72 км/ч и 60 км/ч; 2) 4,5 км/ч и 4,8 км/ч. **8.25.** 1) 3,6 км; 2) 6 км. **8.26.** 1) За 6 ч; 2) через 2 ч 40 мин. **8.27.** 1) Скорость на подъеме 4 км/ч, скорость на спуске 6 км/ч, длина подъема 4 км; 2) скорость на подъеме 3 км/ч, скорость на спуске 6 км/ч, длина спуска 4 км. **8.28.** 1) В 6 раз; 2) в 5 раз. **8.29.** 1) 6 км/ч; 2) 80 км/ч. **8.30.** 1) 1 ч; 2) 30 мин. **8.31.** 1) 4 ч; 2) 1,5 ч. **8.32.** 1) $\frac{2}{5}$ пути; 2) $\frac{1}{2}$ пути. **8.33.** 1) 9 км/ч; 2) 10 км/ч. **8.34.** 1) Первая мельница — 475 ц, вторая — 480 ц, третья — 375 ц; 2) Маше 20 с., Тане 16 с., Оле 18 с. **8.35.** 1) За 2 ч 40 мин; 2) за 8 мин. **8.36.** 1) На 75%; 2) 70%. **8.37.** 1) 40% и 24%; 2) 42% и 30%. **8.38.** 1) 2 : 1; 2) 1 : 2. **8.39.** 1) Предновогодняя; на 10%; 2) цена в конце года; на 30%. **8.40.** 1) Первоначальная стоимость первой картины в 2 раза больше, чем второй; 2) за питание платили в 1,5 раза больше, чем за проживание. **8.41.** 1) 4 кг; 2) на 1,5 р. **8.42.** 1) На 5%; 2) на 5%. **8.43.** 1) 36 учеников; 2) 30 учеников.

РАЗДЕЛ III

Тренировочные варианты экзаменационной работы

Инструкция по выполнению работы

1. Работа состоит из двух частей. В первой части 16 заданий, во второй — 5 заданий. На выполнение всей работы отводится 4 ч. Время на выполнение первой части ограничено: на нее отводится 60 мин.

2. При выполнении заданий первой части нужно указывать только ответы.

При этом:

- если к заданию приводятся варианты ответов (четыре ответа, из которых верный только один), то надо обвести кружком букву, соответствующую верному ответу;
- если ответы к заданию не приводятся, то полученный ответ надо вписать в отведенное для этого место;
- если требуется соотнести некоторые объекты, например графики, обозначенные цифрами 1), 2), 3), и формулы, обозначенные буквами а), б), в), г), то впишите в приведенную таблицу под каждой цифрой соответствующую букву.

3. Если вы ошиблись при выборе ответа, то зачеркните отмеченную букву и обведите нужную:

А. 26   ~~Б.~~ 20   В. 15   Г. 10

В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите новый:

Ответ: $\cancel{x = -12}$ $x = 3$

4. Все необходимые вычисления, преобразования и пр. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нем можно проводить нужные линии, отмечать точки.

5. Задания второй части выполняются на отдельных листах с записью хода решения. Текст задания можно не переписывать, необходимо лишь указать его номер.

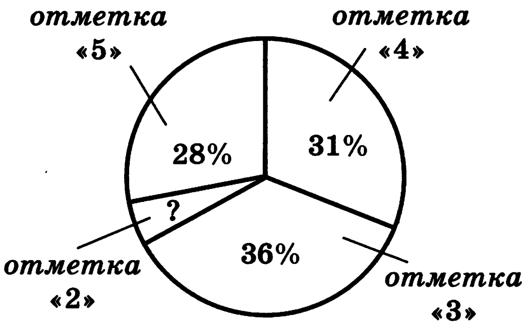
Желаем успеха!

Работа № 1

Вариант 1

Часть 1

1 Результаты районной контрольной работы по алгебре в 9 классе представили в виде диаграммы. Сколько учащихся получили отметку «2», если всего работу писали 320 девятиклассников?



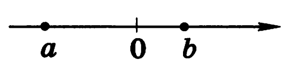
А. 5 учащихся В. 64 учащихся
Б. 16 учащихся Г. 160 учащихся

2 Найдите сумму, значение которой больше 1.

А. $0{,}45+\frac{1}{3}$ В. $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$
Б. $0{,}54+\frac{2}{3}$ Г. $0{,}27 + 0{,}28 + 0{,}29$

3 На координатной прямой точками изображены числа a и b. Из чисел $2a$, $2b$, $a + b$ и $b - a$ выберите наибольшее.

А. $a + b$ В. $2b$
Б. $2a$ Г. $b - a$



4 Найдите значение выражения $\frac{1}{9}xy$ при $x=\sqrt{12}$, $y=\sqrt{3}$.

Ответ: ____________________

5 Принтер печатает одну страницу за 6 с. Сколько страниц можно распечатать на этом принтере за t мин?

А. $6t$ страниц. В. $0{,}1t$ страниц.

Б. $10t$ страниц. Г. $\frac{t}{6}$ страниц.

6 Упростите выражение $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

Ответ: ____________________

7 Найдите значение выражения $(27 \cdot 3^{-4})^2$.

А. $\frac{1}{9}$ Б. 3 В. -9 Г. $-\frac{1}{9}$

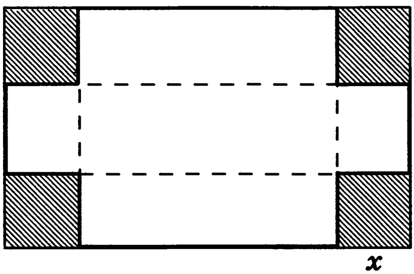
8 Упростите выражение $3\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{2}$.

Ответ: ____________________

9 Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$.

Ответ: ____________________

10 Из прямоугольного листа картона, размеры которого 56 см и 32 см, надо сделать коробку без крышки. Для этого по углам листа вырезают одинаковые квадраты и загибают края вверх. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно коробки имело площадь 640 см^2?



Пусть сторона вырезаемого квадрата равна x см. Какое уравнение соответствует условию задачи?

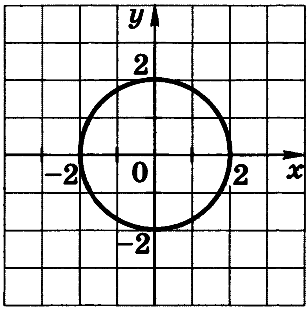
А. $(56 - x)(32 - x) = 640$

Б. $(56 - 2x)(32 - 2x) = 640$

В. $56(32 - 2x) = 640$

Г. $56 \cdot 32 - 4x^2 = 640$

11 Для каждой системы уравнений укажите число ее решений. (Для ответа используйте графики; график уравнения $x^2 + y^2 = 4$ изображен на рисунке.)



1) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2+2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2+3 \end{cases}$

а) Нет решений б) Одно решение в) Два решения

Ответ:

1	2	3

12 Решите неравенство $9x - 3 > 10x - 2$.

Ответ: ____________________

13 Сравните, если возможно, числа a и c при условии, что $a > b$ и $b \leqslant c$.

А. $a > c$

Б. $a < c$

В. $a \leqslant c$

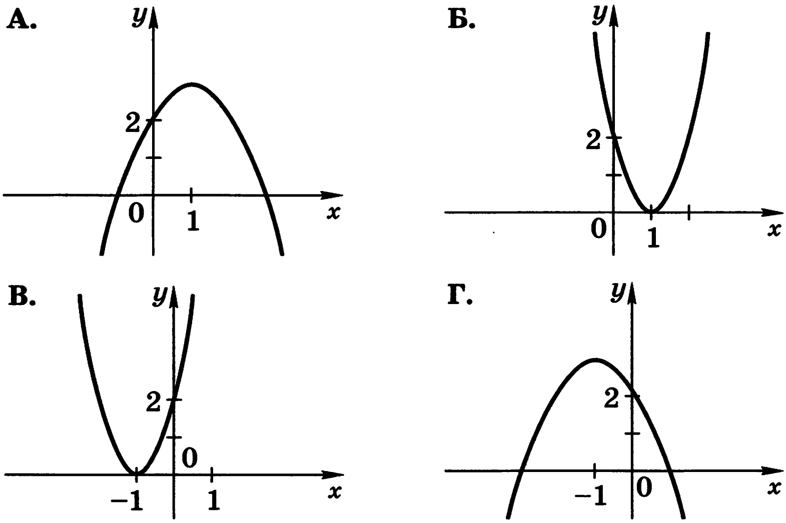
Г. Сравнить невозможно

14 Арифметическая прогрессия задана условиями $a_1 = 4$ и $a_{n+1} = a_n + 4$. Какое из данных чисел не является членом этой прогрессии?

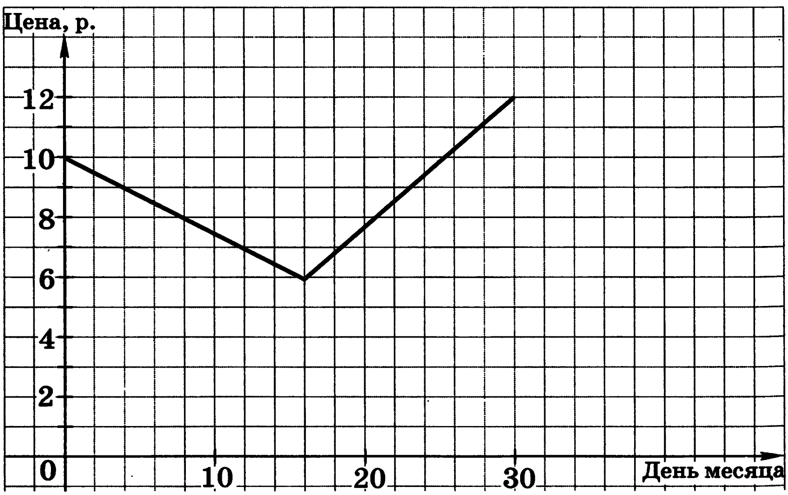
А. 64 В. 34

Б. 44 Г. 24

15 На каком рисунке изображен график функции $y = f(x)$, обладающей свойствами: $f(0) = 2$ и функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 1]$?



16 График показывает, как менялась цена бензина в течение месяца. Определите, на сколько процентов выросла его цена за месяц.



А. На 100%
Б. На 60%
В. На 20%
Г. На 2%

Часть 2

$\boxed{1}$ (2) Сократите дробь $\dfrac{3x^2-2x}{3x^2+7x-6}$.

$\boxed{2}$ (4) Какое из чисел больше: $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ или $3+\sqrt{7}$?

$\boxed{3}$ (4) Постройте график функции

$$y=\begin{cases}4-x, \text{ если } x<4\\ \frac{1}{2}x-3, \text{ если } x\geqslant 4.\end{cases}$$

На каком промежутке функция возрастает?

$\boxed{4}$ (6) При каких отрицательных значениях a система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ 2x+y=1\end{cases}$$

имеет два решения?

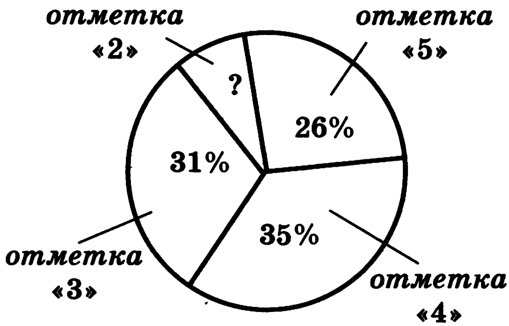
$\boxed{5}$ (6) Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

Работа № 1

Вариант 2

Часть 1

1 Результаты районной контрольной работы по физике в 9 классе представили в виде диаграммы. Сколько учащихся получили отметку «2», если всего работу писали 400 девятиклассников?



А. 320 учащихся В. 32 учащихся

Б. 50 учащихся Г. 8 учащихся

2 Найдите сумму, значение которой меньше 1.

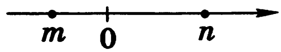
А. $\frac{1}{3}+0,47$ В. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$

Б. $\frac{2}{3}+0,58$ Г. $0,34 + 0,38 + 0,45$

3 На координатной прямой точками изображены числа m и n. Из чисел $2m$, $2n$, $n - m$, $m - n$ выберите наибольшее.

А. $2m$ В. $n - m$

Б. $2n$ Г. $m - n$



4 Найдите значение выражения $\frac{a}{6b}$ при $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{2}$.

Ответ: ____________________

$\boxed{5}$ Принтер печатает одну страницу за 4 с. Сколько страниц можно распечатать на этом принтере за t мин?

А. $\frac{t}{4}$ страниц   В. $4t$ страниц

Б. $\frac{t}{15}$ страниц   Г. $15t$ страниц

$\boxed{6}$ Упростите выражение $\frac{a^2+9}{a^2-9}-\frac{a+3}{a-3}$.

Ответ: ________________

$\boxed{7}$ Найдите значение выражения $16 \cdot (2^{-3})^2$.

А. $-\frac{1}{4}$ Б. $\frac{1}{4}$ В. -4 Г. $\frac{1}{2}$

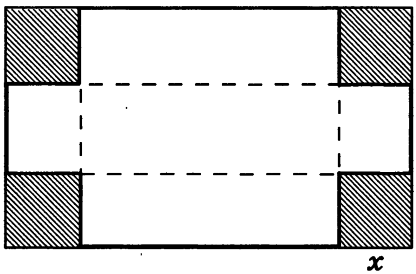
$\boxed{8}$ Упростите выражение $\sqrt{50}-4\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

Ответ: ________________

$\boxed{9}$ Решите уравнение $\frac{x+9}{3}-\frac{x}{5}=1$.

Ответ: ________________

$\boxed{10}$ Прямоугольный лист жести имеет размеры 48 см и 36 см. Из него надо изготовить противень, вырезав по углам листа одинаковые квадраты и загнув края вверх. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно противня имело площадь 1120 см^2?



Пусть сторона вырезаемого квадрата имеет длину x см. Какое уравнение соответствует условию задачи?

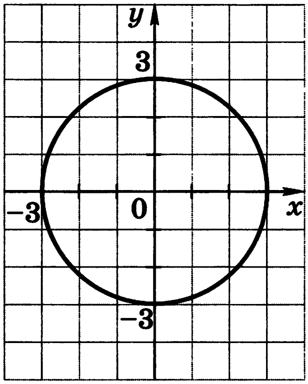
А. $(48 - 2x)(36 - 2x) = 1120$

Б. $48 \cdot 36 - 4x^2 = 1120$

В. $(48 - x)(36 - x) = 1120$

Г. $36(48 - 2x) = 1120$

11 Для каждой системы уравнений укажите число ее решений. (Для ответа используйте графики; график уравнения $x^2 + y^2 = 9$ изображен на рисунке.)



1) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=x^2+4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=x^2-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=x^2+2 \end{cases}$

а) Нет решений б) Два решения в) Три решения

Ответ:

1	2	3

12 Решите неравенство $6x - 15 > 8x - 11$.

Ответ: ____________________

13 Сравните, если возможно, числа a и c при условии, что $a \geqslant b$ и $c < b$.

А. $a > c$ В. $a \leqslant c$

Б. $a < c$ Г. Сравнить невозможно

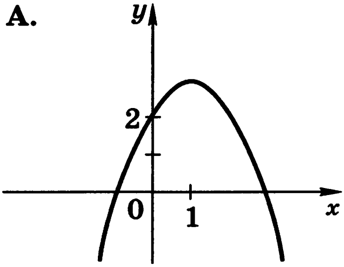
14 Геометрическая прогрессия задана условиями $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n$. Какое из данных чисел не является членом этой прогрессии?

А. 8 В. 34

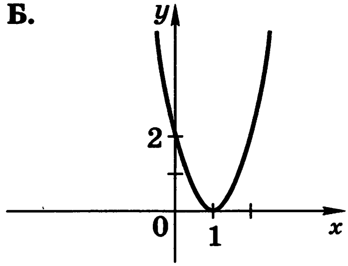
Б. 16 Г. 64

15 На каком рисунке изображен график функции $y = f(x)$, обладающей свойствами: $f(0) = 2$ и функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 1]$?

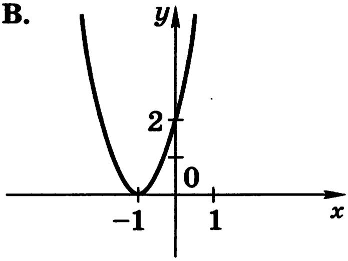
А.



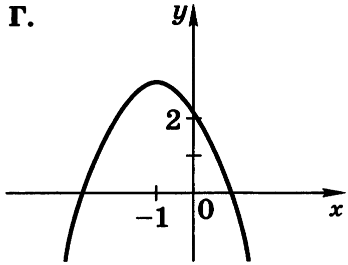
Б.



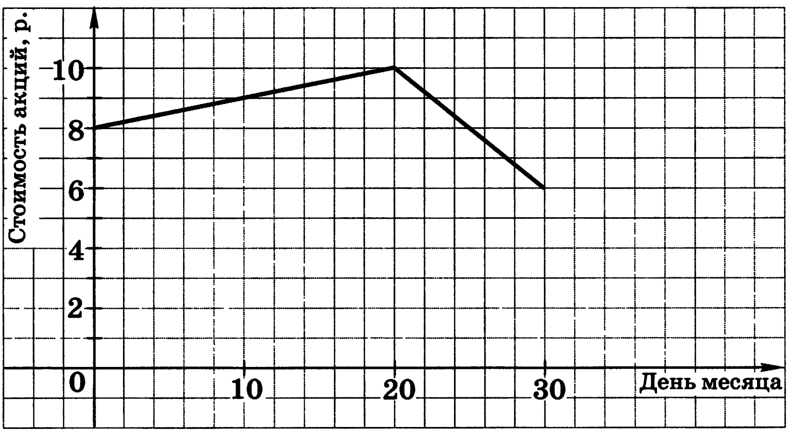
В.



Г.



16 График показывает, как менялась цена акций компании в течение месяца. Определите, на сколько процентов снизилась за месяц цена акций этой компании.



А. На 40% **В.** На 4%

Б. На 25% **Г.** На 2%

Часть 2

1 (2) Сократите дробь $\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

2 (4) Какое из чисел больше: $3+\sqrt{5}$ или $\sqrt{8}+\sqrt{6}$?

3 (4) Постройте график функции

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+3, \text{ если } x\leqslant 2\\ x-4, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

На каком промежутке функция убывает?

4 (6) Найдите все положительные значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x-y=2\\ x^2+y^2=m^2\end{cases}$$

не имеет решений.

5 (6) Разность пятого и первого членов геометрической прогрессии равна 80, а разность шестого и второго членов равна 240. Сколько членов этой прогрессии нужно сложить, чтобы их сумма была равна 364?

Работа № 2

Вариант 1

Часть 1

1 Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{2}{9}$?

А. [0,1; 0,2] В. [0,3; 0,4]

Б. [0,2; 0,3] Г. [0,4; 0,5]

2 На банке с краской имеется надпись: $m = 5 \pm 0{,}05$ кг, где m — масса краски. В каких границах заключено точное значение m?

А. $4{,}5 \leqslant m \leqslant 5{,}5$ В. $5 \leqslant m \leqslant 5{,}05$

Б. $4{,}95 \leqslant m \leqslant 5{,}05$ Г. $4{,}95 \leqslant m \leqslant 5$

3 В таблице приведена стоимость работ по установке натяжных потолков.

Вид потолка		Цена в р. за 1 м^2 (в зависимости от площади потолка)			
		до 10 м^2	от 11 до 30 м^2	от 31 до 60 м^2	свыше 60 м^2
Матовый	белый	1050	850	700	600
	цветной	1100	900	800	700
Глянцевый	белый	1200	1000	900	850
	цветной	1450	1100	950	900

Пользуясь данными, представленными в таблице, определите, какова будет стоимость работ, если площадь потолка 50 м^2, потолок матовый голубой и действует скидка 10%.

А. 40000 р. В. 44000 р.

Б. 4000 р. Г. 36000 р.

4 Зная длину своего шага, человек может приближенно подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошел человек, если $l = 60$ см, $n = 2500$? Ответ выразите в километрах.

Ответ: ____________________

5 Соотнесите каждое выражение с множеством значений переменной, при которых оно имеет смысл.

1) $\frac{(a-1)(2-a)}{3}$ 2) $\frac{3}{(a-1)(2-a)}$ 3) $\frac{a-1}{2-a}$

а) $a \neq 1$
б) $a \neq 2$
в) $a \neq 1$ и $a \neq 2$
г) a — любое число

Ответ:

1	2	3

6 Представьте значение выражения $(3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (2 \cdot 10^3)$ в виде десятичной дроби.

Ответ: ____________________

7 Выполните деление: $\frac{n}{m^2 - mn} : \frac{n^2}{m^2 - n^2}$.

Ответ: ____________________

8 Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны $(7-\sqrt{5})$ см и $(7+\sqrt{5})$ см.

А. 44 см^2 **Б.** 12 см^2 **В.** 1 см^2 **Г.** 22 см^2

9 Решите уравнение $\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$.

Ответ: ____________________

10 В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $x + 5y = -7$ и $3x + 2y = 5$?

А. В I четверти

Б. Во II четверти

В. В III четверти

Г. В IV четверти

11 Путь от турбазы до автостанции турист проехал на велосипеде за 2 ч. Чтобы пройти это расстояние пешком, ему понадобилось бы 6 ч. Известно, что идет он со скоростью, на 4 км/ч меньшей, чем едет на велосипеде. С какой скоростью идет турист?
Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена скорость (в километрах в час), с которой идет турист.

А. $6x = 2(x - 4)$ В. $2x = 6(x - 4)$

Б. $6x = 2(x + 4)$ Г. $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 4$

12 Решите систему неравенств $\begin{cases} 6x + 3 > 0 \\ 7 - 4x < -1. \end{cases}$

А. $x > -0{,}5$ В. $-0{,}5 < x < 2$

Б. $x > 2$ Г. Система не имеет решений

13 Укажите неравенство, решением которого является любое число.

А. $x^2 + 9 \leqslant 0$ В. $x^2 + 9 \geqslant 0$

Б. $x^2 - 9 \leqslant 0$ Г. $x^2 - 9 \geqslant 0$

14 Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии

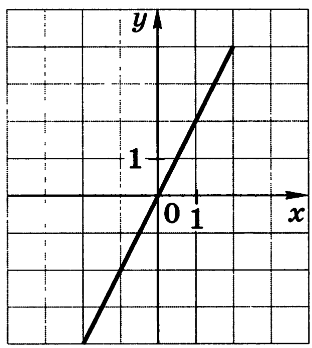
$$\ldots;\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ x;\ \frac{4}{3};\ \ldots\ .$$

Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

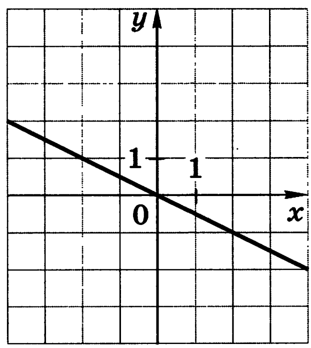
Ответ: ____________________

15 На каком рисунке (с. 193—194) изображен график функции $y = -\frac{1}{2}x$?

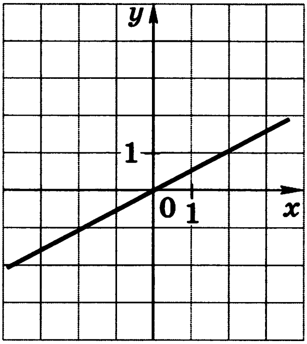
А.



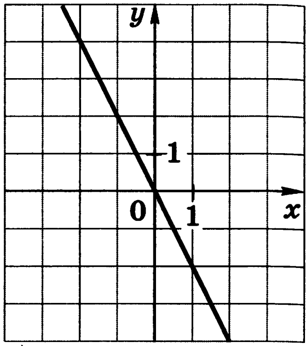
В.



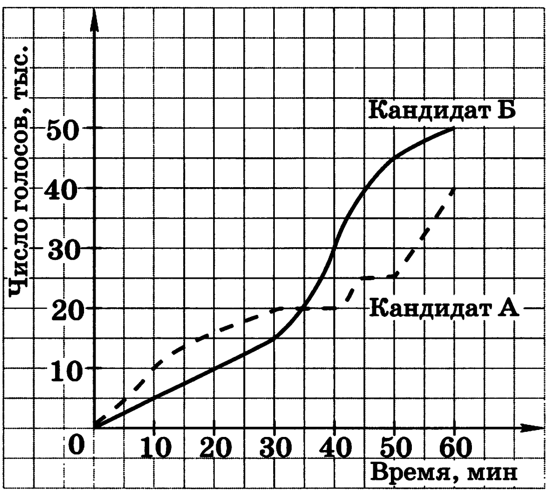
Б.



Г.



16 На графиках показано, как во время телевизионных дебатов между кандидатами А и Б телезрители голосовали за каждого из них. По горизонтальной оси откладывается время (в минутах), прошедшее с начала голосования, а по вертикальной — число голосов, поданных за кандидата к данной минуте. За кого из кандидатов было подано больше голосов в период с 45-й до 60-й минуты дебатов и на сколько больше?



Ответ: ____________________

Часть 2

$\boxed{1}$ (2) Разложите на множители многочлен

$$a^3 - ab - a^2b + a^2.$$

$\boxed{2}$ (4) Известно, что парабола проходит через точку $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ и ее вершина находится в начале координат. Запишите уравнение параболы и определите, в каких точках она пересекает прямую $y = 9$.

$\boxed{3}$ (4) В прошлом году на два самых популярных факультета университета было подано 1100 заявлений. В этом году число заявлений на один из этих факультетов уменьшилось на 20%, а на другой увеличилось на 30% и стало равным 1130. Сколько заявлений подано на каждый из двух факультетов в этом году?

$\boxed{4}$ (6) Решите уравнение

$$(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = = 1.$$

$\boxed{5}$ (6) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leqslant 0$$

не имеет решений.

Работа № 2

Вариант 2

Часть 1

1 Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{7}{9}$?

А. [0,5; 0,6] В. [0,7; 0,8]

Б. [0,6; 0,7] Г. [0,8; 0,9]

2 На рулоне обоев имеется надпись: $l = 20 \pm 0{,}1$ м, где l — длина рулона (в метрах). В каких границах заключено точное значение l?

А. $19 \leqslant l \leqslant 21$ В. $19{,}9 \leqslant l \leqslant 20$

Б. $20 \leqslant l \leqslant 20{,}1$ Г. $19{,}9 \leqslant l \leqslant 20{,}1$

3 В таблице приведена стоимость работ по установке натяжных потолков.

Вид потолка		Цена в р. за 1 м^2 (в зависимости от площади потолка)			
		до 10 м^2	от 11 до 30 м^2	от 31 до 60 м^2	свыше 60 м^2
Матовый	белый	1050	850	700	600
	цветной	1100	900	800	700
Глянцевый	белый	1200	1000	900	850
	цветной	1450	1100	950	900

Пользуясь данными, представленными в таблице, определите, какова будет стоимость работ, если площадь потолка 20 м^2, потолок глянцевый зеленый и действует скидка 10%.

А. 2200 р. В. 24200 р.

Б. 22000 р. Г. 19800 р.

4 Зная длину своего шага, человек может приближенно подсчитать пройденное им расстояние по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошел человек, если $l = 40$ см, $n = 3500$? Ответ выразите в километрах.

Ответ: ____________________

5 Соотнесите каждое выражение с множеством значений переменной, при которых оно имеет смысл.

1) $\dfrac{4-c}{3+c}$ 2) $\dfrac{(4-c)(3+c)}{2}$ 3) $\dfrac{2}{(4-c)(3+c)}$

а) $c \neq -3$ и $c \neq 4$
б) $c \neq 4$
в) $c \neq -3$
г) c — любое число

Ответ:

1	2	3

6 Представьте значение выражения $(2 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (3 \cdot 10^4)$ в виде десятичной дроби.

Ответ: ____________________

7 Выполните вычитание: $\dfrac{10}{5c+c^2}-\dfrac{2}{c}$.

Ответ: ____________________

8 Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны $(\sqrt{11}+1)$ см и $(\sqrt{11}-1)$ см.

А. 10 см^2 **Б.** 60 см^2 **В.** 5 см^2 **Г.** 6 см^2

9 Решите уравнение $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = 0$.

Ответ: ____________________

10 В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $2x + 5y = 4$ и $3x + y = -7$?

А. В I четверти

Б. Во II четверти

В. В III четверти

Г. В IV четверти

11 От одного города до другого автобус доехал за 3 ч, а автомобиль — за 2 ч. Скорость автомобиля на 25 км/ч больше скорости автобуса. Чему равно расстояние между городами?
Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено расстояние (в километрах) между городами.

А. $2x = 3(x - 25)$　　В. $\frac{x}{2} + 25 = \frac{x}{3}$

Б. $3x = 2(x + 25)$　　Г. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 25$

12 Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x - 2 > 0 \\ 7 - 6x > 1. \end{cases}$

А. $x > 1$　　В. $x < 0{,}5$

Б. $x > \frac{1}{2}$　　Г. $0{,}5 < x < 1$

13 Укажите неравенство, которое не имеет решений.

А. $x^2 - 4 \geqslant 0$　　В. $x^2 - 4 \leqslant 0$

Б. $x^2 + 4 \geqslant 0$　　Г. $x^2 + 4 \leqslant 0$

14 Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии

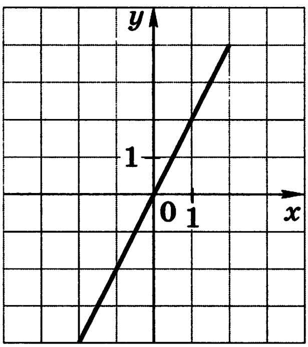
$$\ldots; -8; -5; x; 1; \ldots .$$

Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

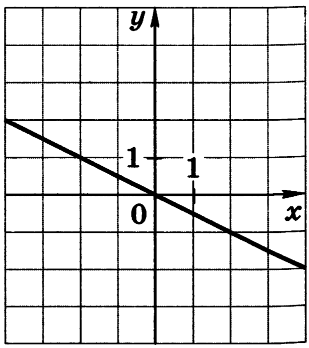
Ответ: ____________________

15 На каком рисунке (с. 198—199) изображен график функции $y = -2x$?

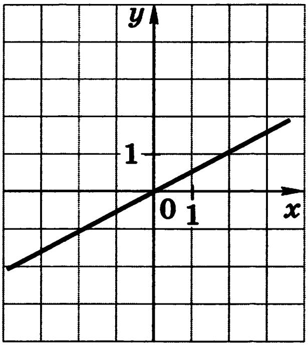
А.



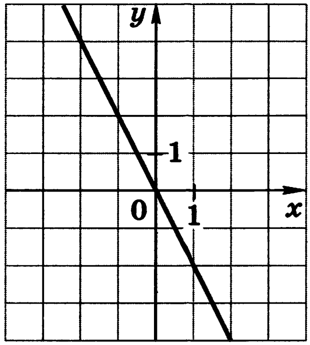
В.



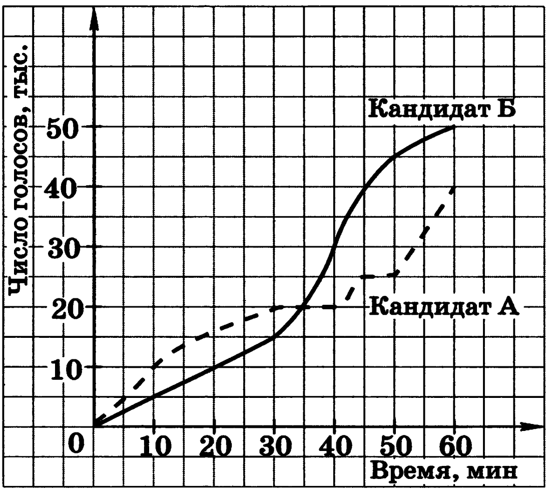
Б.



Г.



16 На графиках показано, как во время телевизионных дебатов между кандидатами А и Б телезрители голосовали за каждого из них. По горизонтальной оси откладывается время (в минутах), прошедшее с начала голосования, а по вертикальной — число голосов, поданных за кандидата к данной минуте. За кого из кандидатов было подано больше голосов в период с 20-й до 40-й минуты дебатов и на сколько больше?



Ответ: ____________________

Часть 2

$\boxed{1}$ (2) Разложите на множители многочлен

$$x^2y - x^2 - xy + x^3.$$

$\boxed{2}$ (4) Известно, что парабола проходит через точку $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ и ее вершина находится в начале координат. Запишите уравнение параболы и определите, в каких точках она пересекает прямую $y = -16$.

$\boxed{3}$ (4) В первом туре олимпиады по математике для восьмых и девятых классов участвовало 160 школьников. Известно, что 30% восьмиклассников и 60% девятиклассников не прошли во второй тур олимпиады. В результате в этом туре приняло участие 85 школьников. Сколько восьмиклассников и сколько девятиклассников участвовало во втором туре олимпиады?

$\boxed{4}$ (6) Решите уравнение

$$(2x^2 - x + 1)^2 + 2x(2x - 1) = 1.$$

$\boxed{5}$ (6) Найдите все значения m, при которых решением неравенства

$$x^2 - mx + (3 - m) > 0$$

является любое число.

Ответы, комментарии, решения к разделу III

Работа № 1

Вариант 1

Часть 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	Б	Б	Г	2	Б	$-\frac{2mn}{m^2-n^2}$	А	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	5,4	Б	1 → в 2 → б 3 → а	$x < -1$	Г	В	А	В

Задание 2. Ответ легко получить прикидкой, не выполняя вычислений. В самом деле, в случае А каждое слагаемое меньше $\frac{1}{2}$, значит, сумма $0,45 + \frac{1}{3}$ меньше 1. В случае Б каждое слагаемое больше $\frac{1}{2}$, значит, сумма $0,54 + \frac{2}{3}$ больше 1. Случаи В и Г уже можно не рассматривать. Но если рассмотреть их для самоконтроля, то и в случае В, и в случае Г каждое из трех слагаемых меньше $\frac{1}{3}$, а значит, сумма меньше 1.

Задание 3. Числа $2a$ и $a + b$ — отрицательные, остается сравнить числа $2b$ и $b - a$, т. е. суммы положительных чисел $b + b$ и $b + (-a)$. Так как на координатной прямой точка a расположена дальше от 0, чем точка b, то $|a| > |b|$. Значит, сумма $b + (-a)$ больше. Полезно проверить себя, взяв конкретные числа, например $a = -5$, $b = 2$. Можно при решении поступить иначе: в бланке с заданиями отметить на координатной прямой примерное положение требуемых чисел; такой рисунок также даст нужный ответ.

Задание 13. Сначала отметим на координатной прямой точки a и b (неравенство $a > b$ означает, что точка a находится правее точки b). А как расположена по отношению к точке a точка c? Неравенство $b \leqslant c$ говорит лишь о том, что возможны разные варианты: точка c совпадает с точкой b; точка c расположена между b и a; точка c расположена правее a. Поэтому верным является ответ Г.

Задание 16. В начале месяца цена составляла 10 р., а в конце — 12 р., т. е. за месяц цена выросла на 2 р. Найдем, какую часть составляют 2 р. от первоначальной цены — это $\frac{2}{10}$, и выразим ее в процентах — это 20%.

Часть 2

Задание 1. Решение. Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 + 7x - 6$; получим $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

$$\frac{3x^2-2x}{3x^2+7x-6} = \frac{x(3x-2)}{3(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)} = \frac{x(3x-2)}{(x+3)(3x-2)} = \frac{x}{x+3}.$$

Заметим, что область определения сокращаемой дроби указывать не требуется. Ответ. $\frac{x}{x+3}$.

Задание 2. Решение. Найдем квадраты чисел $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$:

$(\sqrt{6} + \sqrt{10})^2 = 16 + 2\sqrt{60} = 16 + \sqrt{240}$; $(3+\sqrt{7})^2 = 16+6\sqrt{7} = 16+\sqrt{252}$.

Так как $\sqrt{252} > \sqrt{240}$, то $(3+\sqrt{7})^2 > (\sqrt{6}+\sqrt{10})^2$. Учитывая, что $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ и $3+\sqrt{7}$ — положительные числа, получаем неравенство $3+\sqrt{7} > \sqrt{6}+\sqrt{10}$. Ответ. $3+\sqrt{7}$.

Задание 3. Ответ. График изображен на рисунке 1; функция возрастает на промежутке $[4; +\infty)$.

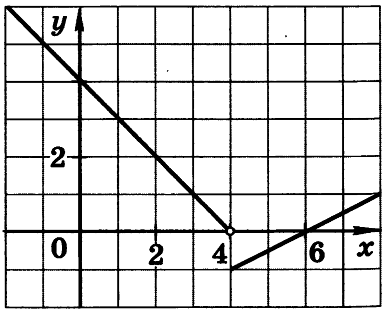


Рис. 1

Задание 4. Решение. Подставим $y = 1 - 2x$ в уравнение $x^2 + y^2 = a^2$, получим уравнение (относительно x)

$$5x^2 - 4x + (1 - a^2) = 0.$$

Найдем значения a, при которых это уравнение имеет два корня:

$$D_1 = 4 - 5(1 - a^2) = 5a^2 - 1,$$

$$5a^2 - 1 > 0,\ |a| > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, система имеет два решения при $a < -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и при $a > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Учитывая условие $a < 0$, получаем $a < -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ. При $a < -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Другая возможная форма ответа: при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Задание 5. Решение. Составим по условию систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1q^4 = 51 \\ b_1q + b_1q^5 = 102, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} b_1(1+q^4) = 51 \\ b_1q(1+q^4) = 102. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение почленно на первое ($b_1 \neq 0$), получим уравнение $\frac{b_1q(1+q^4)}{b_1(1+q^4)} = \frac{102}{51}$. Отсюда $q = 2$. Подставив $q = 2$ в первое уравнение системы, найдем, что $b_1 = 3$.

С помощью формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии составим равенство $\frac{3(2^n - 1)}{2-1} = 3069$, из которого следует, что $3(2^n - 1) = 3069$, $2^n - 1 = 1023$, $2^n = 1024$, $2^n = 2^{10}$, $n = 10$. Ответ. 10.

Вариант 2

Часть 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	В	А	Б	$\frac{1}{2}$	Г	$-\frac{6a}{a^2-9}$	Б	$\sqrt{2}-\sqrt{5}$

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	−15	А	1 → а 2 → г 3 → в	$x < -2$	А	В	Б	Б

Часть 2

Задание 1. Решение. Найдем корни квадратного трехчлена $5x^2 - 3x - 2$; получим $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{5}$.

$$\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{5(x-1)\left(x + \frac{2}{5}\right)}{x(5x+2)} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} = \frac{x-1}{x}.$$

(Область определения сокращаемой дроби указывать не требуется.) Ответ. $\frac{x-1}{x}$.

Задание 2. Решение. Найдем квадраты чисел $3 + \sqrt{5}$ и $\sqrt{8} + \sqrt{6}$:

$(3 + \sqrt{5})^2 = 14 + 6\sqrt{5} = 14 + \sqrt{180}$; $(\sqrt{8}+\sqrt{6})^2 = 14+2\sqrt{48} = 14+\sqrt{192}$.

Так как $\sqrt{192} > \sqrt{180}$, то $(\sqrt{8} + \sqrt{6})^2 > (3 + \sqrt{5})^2$. Учитывая, что $\sqrt{8} + \sqrt{6}$ и $3 + \sqrt{5}$ — положительные числа, получаем неравенство $\sqrt{8}+\sqrt{6} > 3+\sqrt{5}$. Ответ. $\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

Задание 3. Ответ. График изображен на рисунке 2; функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

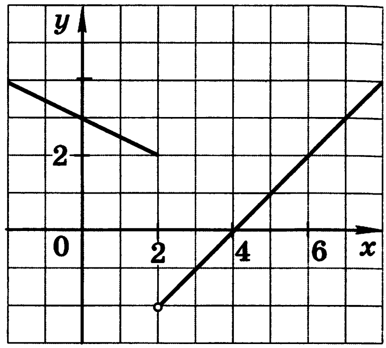


Рис. 2

Задание 4. Решение. Подставим $y = x - 2$ в уравнение $x^2 + y^2 = m^2$, получим уравнение (относительно x)

$$2x^2 - 4x + (4 - m^2) = 0.$$

Найдем значения m, при которых это уравнение не имеет решений:

$$D_1 = 4 - 2(4 - m^2) = 2m^2 - 4;$$
$$2m^2 - 4 < 0; \ |m| < \sqrt{2}.$$

Таким образом, система не имеет решений при $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. Учитывая условие $m > 0$, получаем $0 < m < \sqrt{2}$.

Ответ. При $0 < m < \sqrt{2}$; другая возможная форма ответа: при $m \in (0; \sqrt{2})$.

Задание 5. Решение. Составим по условию систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1q^4 - b_1 = 80 \\ b_1q^5 - b_1q = 240, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1(q^4 - 1) = 80 \\ b_1q(q^4 - 1) = 240. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение почленно на первое ($b_1 \neq 0$, $q \neq \pm 1$), получим уравнение $\dfrac{b_1q(q^4-1)}{b_1(q^4-1)} = \dfrac{240}{80}$. Отсюда получим $q = 3$, подставив которое в первое уравнение системы найдем $b_1 = 1$.

Воспользовавшись формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, запишем равенство $\dfrac{1\cdot(3^n - 1)}{3-1} = 364$, из которого следует, что $3^n - 1 = 728$, $3^n = 729$, $3^n = 3^6$, $n = 6$. Ответ. 6.

Работа № 2

Вариант 1

Часть 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	Б	Б	Г	1,5 км	1 → г 2 → в 3 → б	0,018	$\frac{m+n}{mn}$	Г

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	−6; 3	Г	Б	Б	В	$\frac{2}{3}$	В	За канд. А; на 5 тыс.

Задание 1. Для ответа на вопрос достаточно найти один знак после запятой в десятичном представлении числа $\frac{2}{9}$. Получим $\frac{2}{9} = 0{,}2 \ldots$. Уже понятно, что верным является ответ Б.

Задание 3. Сначала по таблице определяем нужную стоимость 1 кв. м потолка — это 800 р. Тогда стоимость 50 кв. м составляет $800 \cdot 50 = 40000$ (р.). С учетом скидки получаем $40000 \cdot 0{,}9 = 36000$ (р.).

Задание 10. Предполагается, что ответ будет получен аналитическим способом, т. е. решением системы $\begin{cases} x+5y=-7 \\ 3x+2y=5. \end{cases}$

Задание 14. Полезно рассмотреть два способа: 1) найти знаменатель прогрессии q $\left(q = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2\right)$ и умножить на этот знаменатель второй член прогрессии $\left(x = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}\right)$; 2) найти x как среднее геометрическое предыдущего и последующего членов ($x > 0$).

Часть 2

Задание 1. Решение. $a^3 - ab - a^2b + a^2 = (a^3 - a^2b) + (a^2 - ab) = a^2(a - b) + a(a - b) = (a - b)(a^2 + a) = a(a + 1)(a - b)$. Заметим, что слагаемые можно сгруппировать иначе: $a^3 - ab - a^2b + a^2 = (a^3 + a^2) - (a^2b + ab) =$ и т. д.

Можно также сначала вынести за скобки общий множитель a, а затем воспользоваться методом группировки. Ответ. $a(a + 1)(a - b)$.

Задание 2. Решение. Парабола задается уравнением вида $y = ax^2$. Подставив в это уравнение координаты точки B, найдем, что $a = \frac{1}{4}$, т. е. уравнение параболы $y = \frac{1}{4}x^2$.

Решим уравнение $\frac{1}{4}x^2 = 9$; получим $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. Значит, парабола пересекает прямую $y = 9$ в точках (6; 9) и (–6; 9). Ответ. $y = \frac{1}{4}x^2$; (6; 9) и (–6; 9) — точки пресечения параболы с прямой $y = 9$.

Задание 3. Решение. I способ. Пусть в прошлом году на первый факультет было подано x заявлений, а на второй — y заявлений; имеем уравнение $x + y = 1100$. В этом году на первый факультет подано $0{,}8x$ заявлений, а на второй — $1{,}3y$ заявлений; имеем уравнение $0{,}8x + 1{,}3y = 1130$. Таким образом, получаем систему $\begin{cases} x + y = 1100 \\ 0{,}8x + 1{,}3y = 1130. \end{cases}$

Умножим обе части второго уравнения на 10, получим

$$\begin{cases} x + y = 1100 \\ 8x + 13y = 11\,300. \end{cases}$$

Отсюда $x = 600$, $y = 500$. Далее, $0{,}8x = 480$, $1{,}3y = 650$. Ответ. На первый факультет подано 480 заявлений, на второй — 650 заявлений.

II способ. Обозначим через x и y число заявлений, поданных соответственно на первый и второй факультеты в этом году. Получим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1130 \\ 1{,}25x + \frac{10}{13}y = 1100. \end{cases}$

Второе уравнение можно преобразовать, умножив обе его части на 13 и разделив на 1,25. Получим $13 \cdot 1{,}25x + 10y = 13 \cdot 1100$, т. е. $13x + 8y = 13 \cdot 880$. Далее решим систему

$$\begin{cases} x + y = 1130 \\ 13x + 8y = 11\,440. \end{cases}$$

Задание 4. Решение. Представим уравнение в виде $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x^2 - 7x + 12) = 1$. Введем замену $x^2 - 7x + 13 = y$; получим уравнение $y^2 - (y - 1) - 1 = 0$, т. е. $y^2 - y = 0$. Его корни $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Уравнение $x^2 - 7x + 13 = 0$ корней не имеет; уравнение $x^2 - 7x + 13 = 1$ имеет корни 3 и 4.

Заметим, что возможны и другие замены, например $x^2 - 7x + 12 = y$; тогда получается уравнение $(y + 1)^2 - y - 1 = 0$. Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Задание 5. Решение. График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен. Имеем $D_1 = (a + 2)^2 - (8a + 1) = a^2 - 4a + 3 < 0$; получаем $1 < a < 3$. Ответ. $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1;\ 3)$.

Вариант 2

Часть 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	В	Г	Г	1,4 км	1 → в 2 → г 3 → а	0,24	$-\frac{2}{5+c}$	В

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	−2; 8	Б	Г	Г	Б	−2	Г	За канд. Б; на 15 тыс.

Часть 2

Задание 1. Решение. $x^2y - x^2 - xy + x^3 = (x^2y - xy) + (x^3 - x^2) = xy(x - 1) + x^2(x - 1) = x(x - 1)(y + x)$. Заметим, что слагаемые можно сгруппировать иначе: $x^2y - x^2 - xy + x^3 = (x^2y + x^3) - (x^2 + xy) =$ и т. д. Можно также сразу вынести за скобки общий множитель x, а затем воспользоваться методом группировки. Ответ. $x(x - 1)(y + x)$.

Задание 2. Решение. Парабола задается уравнением вида $y = ax^2$. Подставив в это уравнение координаты точки B, найдем, что $a = -\frac{1}{4}$, т. е. уравнение параболы $y = -\frac{1}{4}x^2$. Решим уравнение $-\frac{1}{4}x^2 = -16$; получим $x_1 = 8$, $x_2 = -8$. Значит, парабола пересекает прямую $y = -16$ в точках $(8;\ -16)$ и $(-8;\ -16)$. Ответ. $y = -\frac{1}{4}x^2$; $(8;\ -16)$ и $(-8;\ -16)$ — точки пересечения параболы с прямой $y = -16$.

Задание 3. Р е ш е н и е. Пусть в первом туре участвовало x восьмиклассников и y девятиклассников; во втором туре участвовало $0,7x$ восьмиклассников и $0,4y$ девятиклассников; имеем уравнение $0,7x + 0,4y = 85$. Таким образом, получаем систему $\begin{cases} x+y=160 \\ 0,7x+0,4y=85. \end{cases}$

Умножим обе части второго уравнения на 10, получим

$$\begin{cases} x+y=160 \\ 7x+4y=850. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что $x = 70$, $y = 90$. Далее, $0,7x = 49$, $0,4y = 36$.

Заметим, что при том же способе введения переменных можно составить другую систему уравнений: $\begin{cases} x+y=160 \\ 0,3x+0,6y=75. \end{cases}$

О т в е т. 49 восьмиклассников и 36 девятиклассников.

Задание 4. Р е ш е н и е. Представим уравнение в виде $(2x^2 - x + 1)^2 + 2(2x^2 - x) = 1$. Введем замену $2x^2 - x + 1 = y$, получим уравнение $y^2 + 2(y - 1) - 1 = 0$, т. е. $y^2 + 2y - 3 = 0$. Его корни $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Уравнение $2x^2 - x + 1 = -3$ корней не имеет; уравнение $2x^2 - x + 1 = 1$ имеет корни 0 и $\frac{1}{2}$. Заметим, что возможны и другие замены, например $2x^2 - x = y$; тогда получается уравнение $(y + 1)^2 + 2y - 1 = 0$. О т в е т. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Задание 5. Р е ш е н и е. График функции $y = x^2 - mx + (3 - m)$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, решением неравенства будет любое число в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - mx + (3 - m)$ должен быть отрицателен. Имеем $D_1 = m^2 - 4(3 - m) = m^2 + 4m - 12 < 0$; получаем $-6 < m < 2$. О т в е т. $-6 < m < 2$; другая возможная форма ответа: $m \in (-6;\ 2)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рекомендации по подготовке к выполнению экзаменационной работы

Некоторые особенности первой части экзамена и рекомендации по подготовке к ее выполнению

Часть 1 экзаменационной работы направлена на проверку достижения базового уровня алгебраической подготовки, т. е. на проверку усвоения элементов содержания, составляющих основу курса алгебры, без знания которых невозможно изучение математики и смежных предметов на старшей ступени школы. Базовая подготовка предполагает знание и понимание основных алгебраических определений, терминов и символов, фактов, формул, владение на элементарном уровне важнейшими алгоритмами, умение переходить с одного математического языка на другой и, что особенно важно, умение применять свои знания к решению несложных задач как математического, так и практического характера. Эта часть экзамена играет свою специфическую роль в оценке уровня подготовки школьников: нельзя получить за экзамен положительную оценку, не выполнив некоторое вполне определенное и заранее известное количество заданий из первой части работы за отведенное на эту часть работы время.

Часть 1 представлена в форме теста, содержащего 16 заданий. Задания расположены группами, относящимися к одному и тому же содержательному блоку курса (например, «Числа», «Алгебраические выражения» и т. д.). В сборнике помещены 12 таких тестов, причем каждый дан в двух вариантах. Они позволяют получить достаточно полное представление о характере и уровне сложности этой части работы, потренироваться в ее выполнении.

Принципиальной особенностью первой части экзаменационной работы является то, что для каждого из 16 заданий нужно указать только ответ, выбрав его из четырех предложенных или вписав в отведенное для этого место. Однако, хотя в экзаменационные бланки заносятся только ответы, включенные в работу задания необходимо выполнять в основном письменно, используя для этого черновик. Решение должно быть записано аккуратно и с достаточной степенью подробности. Это важно не потому, что черновик тоже сдается (он просматриваться не будет), а для того, чтобы ученик не допускал досадных ошибок технического характера.

Например, если требуется преобразовать разность $\frac{15a^2}{3a-2}-5a$, то целесообразно, чтобы ученик последовательно выполнил на черновике такие действия:

$$\frac{15a^2}{3a-2}-5a^{\backslash 3a-2}=\frac{15a^2-5a(3a-2)}{3a-2}=\frac{15a^2-15a^2+10a}{3a-2}=\frac{10a}{3a-2}.$$

Или если требуется найти значение выражения $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, то это выражение нужно преобразовать, опираясь на известные факты. Например, можно воспользоваться определением степени с целым показателем:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16.$$

Можно использовать еще и свойства степени: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=(4^{-1})^{-2}=$ $=4^2=16$. Можно воспользоваться формулой $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, где n — натуральное число: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{1}\right)^{2}=4^2=16$. В любом случае это задание следует выполнять письменно, последовательно и осознанно, соотнося свои действия с известными теоретическими фактами. (В противном случае возникают ошибки типа $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=-16$ или $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{16}$.)

Большая часть заданий первой части экзаменационной работы — это задания с выбором ответа, где из четырех предложенных ответов только один верный. Наличие ответов вовсе не означает, что верный ответ нужно угадывать, подбирать и т. д. Очень часто требуется непосредственное решение, выполняемое к тому же письменно, как уже говорилось выше.

Приведем некоторые примеры. Пусть в задании предлагается установить, на каком из приведенных рисунков показано множество решений системы неравенств

$$\begin{cases}3x+1\geqslant -5\\12-2x\leqslant 0.\end{cases}$$

Чтобы ответить на этот вопрос, указанную систему нужно сначала решить, далее изобразить множество ее решений на координатной прямой, а затем соотнести свой рисунок с рисунками, предложенными в задании (рис. 1).

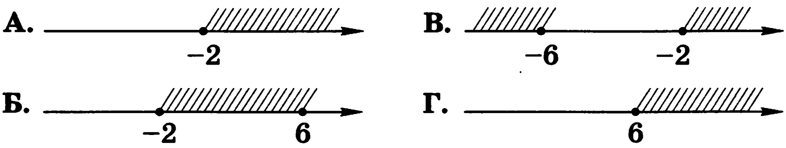


Рис. 1

Часто в экзамен включается текстовая задача и предлагается из четырех указанных уравнений выбрать то, которое соответствует ее условию. В этом случае вряд ли есть смысл устно анализировать уравнения и искать среди них нужное. Проще самостоятельно составить уравнение и соотнести его с предложенными. При этом, однако, верное уравнение может быть записано не в том виде, к которому привел его ученик, и важно уметь распознать равносильные уравнения, например, такие, как

$$\frac{20}{x-3}-\frac{20}{x}=\frac{1}{3},\quad \frac{20}{x-3}=\frac{20}{x}+\frac{1}{3},\quad \frac{20}{x}=\frac{20}{x-3}-\frac{1}{3}.$$

(Естественно, распознавать верные ответы, представленные в разном виде, нужно уметь не только при решении текстовых задач, но и в других ситуациях.)

Еще один пример. Формулой n-го члена $c_n=\frac{(-1)^n}{n}$ задана последовательность, и спрашивается, какое из следующих чисел не является ее членом:

А. -1; В. $-\frac{1}{5}$;

Б. $-\frac{1}{3}$; Г. $-\frac{1}{6}$.

Хотя здесь можно было бы немного порассуждать и получить ответ на вопрос задачи устно, все же проще, наверное, непосредственно вычислять один за другим члены последовательности — долго работать не придется.

Получим $c_1=\frac{(-1)^1}{1}=-1$, $c_2=\frac{(-1)^2}{2}=\frac{1}{2}$, $c_3=\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3}$, $c_4=\frac{(-1)^4}{4}=\frac{1}{4}$, $c_5=\frac{(-1)^5}{5}=-\frac{1}{5}$. Мы видим, что первые три указанных числа являются членами последовательности, а это означает, что верный ответ дан под буквой Г. Можно «для убедительности» найти и $c_6=\frac{(-1)^6}{6}=\frac{1}{6}$, т. е. число $-\frac{1}{6}$ действительно не является членом последовательности.

В то же время тактика выполнения заданий с выбором ответов может быть разной. Бывает так, что можно «идти от ответа». Пусть, например, требуется разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2+9x-30$

и даны такие варианты ответов: **А.** $3(x + 2)(x - 5)$; **Б.** $3(x - 2)(x - 5)$; **В.** $3(x - 2)(x + 5)$; **Г.** $3(x + 2)(x + 5)$.

Конечно, можно решить эту задачу «в лоб», воспользовавшись соответствующей формулой. Однако кто-то, возможно, посчитает, что в техническом отношении проще не раскладывать на множители трехчлен, а перемножать двучлены, особенно если сразу увидеть, что ответы **Б** и **Г** отпадают, так как в этих случаях не получается свободный член, равный -30. Тогда нужно всего лишь выбрать верный ответ из двух оставшихся.

Но бывают и такие задания, когда нет другого пути, кроме как просматривать предложенные ответы — этого требует формулировка задания. Пусть, например, о числах a и b известно, что a — четное число, b — нечетное число. Спрашивается, какое из следующих чисел при этом условии является нечетным: **А.** ab; **Б.** $2(a + b)$; **В.** $a + b$; **Г.** $a + b + 1$. Вспоминая свойства делимости, последовательно устанавливаем, что ab — число четное, произведение $2(a + b)$ также четное, а сумма $a + b$, где одно слагаемое делится на 2, а другое нет, является нечетным числом. Таким образом, выбираем ответ **В.**

Заметим, что такого рода задания, сюжет которых связан со свойствами чисел, допускают простое и эффективное решение — моделирование на числовом примере. (В данном случае можно взять, например, $a = 6$ и $b = 7$ и вычислить каждое из указанных выражений.)

Иногда анализ предложенных ответов помогает сразу увидеть верный, и этим есть смысл пользоваться.

Пусть, например, даны числа: **А.** 60; **Б.** 64; **В.** 66; **Г.** 68. Требуется выяснить, какое из этих чисел не является членом арифметической прогрессии 4; 8; 12; 16; ... . Очевидно, что члены прогрессии — это последовательные натуральные числа, кратные 4. Из предложенных для выбора чисел только одно не делится на 4 — это число 66. Понятно, что именно оно и не является членом прогрессии.

Конечно, ответ на поставленный вопрос можно получить, решая эту задачу формально. А именно, можно задать прогрессию формулой n-го члена $a_n = 4n$ и последовательно решать уравнения $4n = 60$, $4n = 64$ и т. д., отыскивая то, которое не имеет натурального корня. Но очевидно, что первый способ предпочтительнее: он более осмысленный, да и время экономит, но им могут воспользоваться те учащиеся, которые умеют думать, подмечать закономерности.

Некоторые виды заданий рассчитаны на то, что ученик найдет короткий способ решения, опираясь на известные факты. Вот пример такого задания. На рисунке 2 изображена парабола, и предлагается указать формулу, которой она задается. Варианты ответов: **А.** $y = x^2 - 2$; **Б.** $y = -x^2 + 2$; **В.** $y = x^2 + 4$; **Г.** $y = -x^2 + 4$. Здесь, конечно же, не предполагается, что ученик будет строить графики перечисленных функций, пока не наткнется на нужный (хотя и такой длинный и неэффективный путь возможен). Достаточно увидеть, что все эти формулы имеют вид $y = ax^2 + b$, вспомнить зависимость направления ветвей параболы от знака коэффициента a, а также то, что коэффициент b — это ордината пересечения параболы с осью y. Тогда станет очевидным, что верным является ответ **Г**.

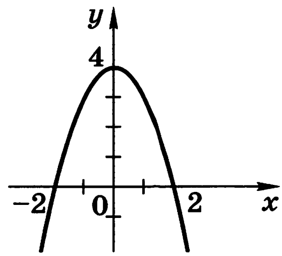


Рис. 2

Важнейшим условием успешности выполнения заданий является осмысленность, осознанность действий и просто здравый смысл. В противном случае, даже имея необходимые знания, можно прийти к неверному ответу.

Показателен такой пример. В одной из экзаменационных работ в заданиях с выбором ответа была предложена задача: «Плата за коммунальные услуги составляет 800 р. Сколько придется платить за коммунальные услуги после их подорожания на 6%?» Некоторые ученики выбрали ответ 48 р., т. е. сумму, которая составляет 6% от 800 р. Эта ошибка довольно типична: выполнив первое действие, учащиеся нередко забывают о втором. Однако тут налицо еще и отсутствие здравого смысла, элементарного самоконтроля, непонимание того, что полученный ответ необходимо соотнести с условиями задачи. Ведь ученики, допустившие эту ошибку, получили парадоксальный результат: после подорожания услуг сумма платежа стала меньше!

Вообще привычка к самоконтролю, к самопроверке для учащихся не менее важна, чем знание правил и формул. Ведь человеку свойственно ошибаться. И всегда полезно проверить себя, используя тот или иной подходящий в данной ситуации прием.

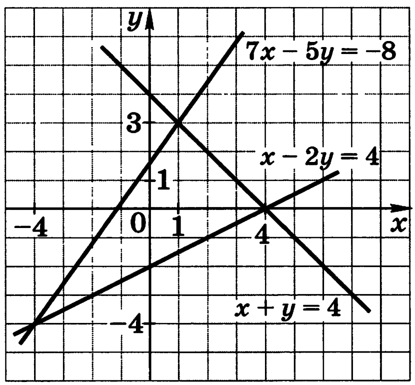


Рис. 3

Так, пусть требуется, используя готовый рисунок (рис. 3), решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4 \\ 7x - 5y = -8. \end{cases}$

Найдя на рисунке нужную точку и «прочитав» ее координаты, естественно проверить себя, подставив найденные числа в уравнения системы.

Часто ученик может проверить себя, выполнив для самоконтроля обратные преобразования. Если, например, нужно представить в стандартном виде число 0,000019, то, получив соответствующее произведение (а это должно быть $1,9 \cdot 10^{-5}$), полезно решить обратную задачу — представить его в виде десятичной дроби.

В заключение заметим, что полезно дать учащимся некоторые советы по использованию тренировочных тестов сборника в процессе самостоятельной подготовки к экзамену.

Прежде всего, выполняя тест, нужно сверять свои ответы с ответами, приведенными в сборнике. Если в каком-то задании ответ неверен и ошибку найти не удается или же путь решения вообще неясен, то следует обратиться за консультацией к учителю. Возможно, придется повторить соответствующий раздел курса по учебнику.

Необязательно выполнять каждый тест от начала до конца. Просматривая какой-либо тест в целом, можно останавливаться лишь на тех заданиях, которые могут вызвать затруднение.

Наконец, полезно 2—3 раза поработать в ситуации, близкой к реальной: постараться выполнить тест целиком (пропуская, быть может, те задания, путь решения которых в принципе неясен) и зафиксировать затраченное на работу время, а также количество верных ответов. Результат удовлетворительный, если потрачено не более 60 минут и верно выполнено 8 или 9 заданий. Если же за указанное время удалось выполнить верно 15 или 16 заданий, то имеются хорошие шансы получить на экзамене отметку «4» или «5».

Подготовка к выполнению заданий второй части экзаменационной работы

Часть 2 работы направлена на проверку владения выпускниками курсом алгебры основной школы на повышенном уровне. Набор заданий, представленный в сборнике, дает достаточное представление о возможном содержании и уровне сложности заданий этой части.

Важно подчеркнуть, что задачи этого раздела (так же как и задачи экзаменационной работы) не выходят за рамки содержания математического образования, обозначенного стандартом. Преимущественно это задачи комплексного характера. Направлены они на проверку таких качеств математической подготовки выпускников, как способность к интеграции знаний из различных тем курса алгебры, уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом, а также широким набором приемов и способов рассуждений, умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

Проверка на повышенном уровне является разноуровневой, и одна из ее целей состоит в том, чтобы дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, в частности составляющих потенциал профильных классов.

В соответствии с этим часть 2 работы включает задания трех уровней сложности. Первое задание наиболее простое. Как правило, это стандартное задание алгоритмического характера, направленное на проверку владения формально-оперативными или графическими умениями. В техническом отношении оно лишь немного превышает задания базового уровня. С ним могут справиться школьники, имеющие отметку «4», а иногда и твердую отметку «3». Второе и третье задания требуют более высокого уровня подготовки. Те, кто справляется с такими заданиями, могут рассчитывать на отличную оценку за экзамен. И последние два — это наиболее трудные задания. Они рассчитаны на учащихся, которые в той или иной форме получили усиленную подготовку по алгебре — изучали этот предмет в объеме пяти или шести уроков в неделю, занимались факультативно, посещали элективные курсы в рамках предпрофильной подготовки и др.

При подготовке учащихся к выполнению второй части экзаменационной работы необходимо постоянно помнить о ее дифференцированном характере. Подбирая задания для тренировки (например, в ходе итогового повторения), их следует соотносить с возможностями и потребностями каждого учащегося, а также с уровнем класса в целом. При этом не надо забывать, что хорошую отметку, и даже «пятерку», можно получить, не выполняя два последних задания работы. Важно, чтобы и учащиеся были об этом информированы.

Как уже говорилось, задания этой части экзаменационной работы выполняются с записью решения. Единственное общее требование к оформлению решения заключается в следующем: приведенные записи должны быть математически грамотными, из них должен быть ясен ход рассуждений учащегося. При этом не следует требовать от сдающего экзамен слишком подробных письменных комментариев. Во всяком случае, не надо требовать описания алгоритмов (например, построения графика, решения неравенства). Лаконичное решение (без пропуска важных шагов), не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, должно рассматриваться как решение без недочетов.

Надо учитывать, что возможны разные формы ответа. Можно употреблять любую принятую запись, главное, чтобы она была грамотной. Так, при решении квадратного уравнения можно просто перечислить его корни: 2; −3; или записать $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. При решении неравенства ответ может быть дан как в виде промежутка, например, $[-3; +\infty)$, так и в виде простейшего неравенства $x \geqslant -3$. При записи области определения функции можно использовать теоретико-множественную символику, например $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, или писать короче: $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

Многие задачи, предлагаемые на экзамене и содержащиеся в разделе II сборника, допускают разные способы решения. Ученик вправе решать задачу любым из них. Соображения типа «можно решить более рационально, более красиво» и пр. при оценивании не играют роли. Однако в ходе подготовки целесообразно показывать учащимся такие решения, знакомить их с некоторыми общими приемами решения тех или иных видов задач, что будет служить пополнению их «математического багажа» и в конечном итоге их математическому развитию.

Приведем примеры решения некоторых задач из различных блоков раздела II, дополнив их методическими комментариями.

■ **Пример 1 (№ 1.42).** Представьте выражение

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 15$$

в виде произведения двух многочленов.

Преобразование «в лоб» ни к чему не приведет. Поэтому воспользуемся следующим приемом: перемножим попарно крайние и средние множители — при этом полученные произведения будут содержать одинаковые члены:

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 15 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 15.$$

Введем новую переменную $t = x^2 + 3x$. В результате получим квадратный трехчлен $t(t + 2) - 15$, для которого способ разложения на множители известен:

$$t(t + 2) - 15 = t^2 - 2t - 15 = (t - 3)(t + 5).$$

Вернувшись к переменной x, получим

$$(x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x + 5).$$

Вот как может выглядеть рассмотренное решение в работе учащегося:

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 15 = x(x + 3)(x + 1)(x + 2) - $$
$$- 15 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 15.$$

Введем замену $x^2 + 3x = t$:

$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 15 = t(t + 2) - 15 = t^2 - 2t - 15.$

Найдем корни уравнения $t^2 - 2t - 15 = 0$; получим $t_1 = -5$, $t_2 = 3$. Значит,

$$t^2 - 2t - 15 = (t - 3)(t + 5).$$

Так как $t = x^2 + 3x$, то $(t - 3)(t + 5) = (x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x + 5)$.

Ответ: $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 15 = (x^2 + 3x - 3)\times(x^2 + 3x + 5)$. ■

Заметим, что прием введения новой переменной для приведения выражения к более простому виду используется довольно часто: при преобразовании выражений, решении уравнений, неравенств, систем. Так, при решении системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{6}{x-y} - \dfrac{8}{x+y} = -2 \\ \dfrac{9}{x-y} + \dfrac{10}{x+y} = 8 \end{cases}$ замена $\dfrac{1}{x-y} = a$, $\dfrac{1}{x+y} = b$ позволяет избавиться от дробей (№ 3.17). При решении уравнения $x+\sqrt{x}-20=0$ замена $\sqrt{x}=t$ позволяет избавиться от корня и свести уравнение к квадратному (№ 2.21). При решении неравенства $(x^2 + 2x)^2 + 3(x + 1)^2 > 3$ замена $x^2 + 2x = t$ позволяет получить стандартное квадратное неравенство $t^2 + 3(t + 1) > 3$, алгоритм решения которого известен (№ 4.37). При упрощении выражения $\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1-a\sqrt{a}}{a(1-\sqrt{a})}+1$ замена $\sqrt{a}=b$ позволяет «разглядеть» в числителе разность кубов и сократить дробь.

■ Пример 2 (№ 1.48). Имеет ли произведение ab, где $b = 5 - a$, наибольшее значение, и если имеет, то при каких a и b оно достигается?

Подставив в произведение ab вместо b разность $5 - a$, получим $ab = a(5 - a) = 5a - a^2$.

Теперь надо исследовать квадратный трехчлен $5a - a^2$.

Воспользуемся свойствами квадратичной функции. Ее график — парабола. Коэффициент при a^2 отрицателен, поэтому ветви параболы направлены вниз, и функция имеет наибольшее значение.

Так как корни трехчлена — числа 0 и 5, то абсцисса вершины параболы равна 2,5. Таким образом, наибольшее значение трехчлен $5a - a^2$, а значит, и произведение ab, принимает при $a = 2,5$. Найдем соответствующее значение b: $b = 5 - a = 2,5$.

Ответ: имеет; при $a = b = 2,5$. ■

При ответе на вопрос задачи мы опирались на свойства квадратичной функции. Вообще, решение многих задач основано на применении функциональных свойств выражений. Так, для того чтобы доказать, что выражение $x^4 + 3x^2 - x + 3$ при любых x принимает положительные значения, надо показать, что квадратный трехчлен $3x^2 - x + 3$ всегда положителен (№ 1.44). Чтобы найти наибольшее значение выражения $\frac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}$, нужно представить эту дробь в виде $\frac{10}{(x+2)^2+(y-3)^2+1}$ и воспользоваться тем, что выражение вида a^2 принимает наименьшее значение при $a = 0$ (№ 1.46). Похожим образом обстоит дело с заданием, в котором нужно найти наименьшее значение суммы $\sqrt{2x-2y+10}+\sqrt{x+3y-3}$. Так как выражение вида $\sqrt{a}$ принимает наименьшее значение при $a = 0$, то необходимо, чтобы одновременно равнялись нулю подкоренные выражения $2x - 2y + 10$ и $x + 3y - 3$ (№ 1.55).

Факт существования наименьшего значения у функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, используется и при доказательстве того, что уравнение $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 1$ не имеет корней. В самом деле, наименьшее значение каждого из этих двух квадратных трехчленов равно 1, но достигается оно при разных значениях x (№ 2.41).

▩ Пример 3. Имеются два раствора одной и той же соли разной концентрации — 35% и 60%. В каком отношении надо взять первый и второй растворы, чтобы получить раствор, концентрация которого 40%?

Пусть x — масса первого раствора, y — масса второго раствора (выраженные в одних единицах). Тогда количество соли в первом растворе составляет $0{,}35x$, а во втором — $0{,}6y$. Масса нового раствора равна $x + y$, а количество соли в нем $0{,}4(x + y)$. Получаем уравнение

$$0{,}35x + 0{,}6y = 0{,}4(x + y),$$
$$35x + 60y = 40x + 40y,$$
$$x = 4y,$$
$$\frac{x}{y} = 4.$$

Ответ: первый и второй растворы надо взять в отношении 4 : 1. ▩

Решая задачу, мы получили одно уравнение с двумя переменными, но смогли ответить на вопрос, так как надо было найти не конкретные значения x и y, а их отношение. Вообще, при решении многих текстовых задач возникают аналогичные ситуации — уравнений получается меньше, чем переменных. Но в таких задачах, как правило, вопрос ставится таким образом, что находить значения всех величин, обозначенных буквами, не требуется. Стандартная постановка вопроса в таких задачах обычно такова: найти отношение величин, их сумму, натуральные решения и др.

Например, задача № **8.35** сводится к системе уравнений $\begin{cases} y+z+t=\frac{1}{4} \\ x+z+t=\frac{1}{3} \\ x+y=\frac{1}{6}, \end{cases}$ где x, y, z, t — производительности бригад. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно найти их общую производительность, т. е. сумму $x+y+z+t$.

Задача **7.41(1)** (на арифметическую прогрессию) сводится к решению в натуральных числах уравнения $2a_1 + 9d = 40$. Выразив a_1 через d и выполнив перебор, получим два решения: $a_1 = 11$, $d = 2$ и $a_1 = 2$, $d = 4$.

■ Пример 4 (**6.39**). Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условиями

$$y=\begin{cases} 2x+5, \text{ если } x<-2 \\ 1, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 2 \\ 2x-3, \text{ если } x>2. \end{cases}$$

Построим заданную ломаную и проведем «граничные» прямые, которые задаются уравнениями $y = kx$ (рис. 4). Одна из этих прямых проходит через точку (2; 1), а вторая параллельна прямым $y = 2x + 5$ и $y = 2x - 3$. Уравнение первой прямой $y = \frac{1}{2}x$; уравнение второй прямой $y = 2x$. Из рисунка видно, что все прямые, проходящие через начало координат, находящиеся «между» этими двумя прямыми, пересекают ломаную в трех точках.

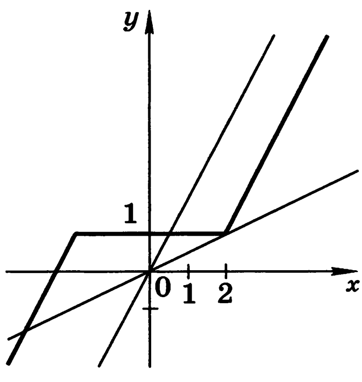


Рис. 4

Ответ: $\frac{1}{2} < k < 2$. ■

В задачах, где уравнения, формулы содержат буквенные коэффициенты, часто можно использовать графические соображения, как это было сделано в рассмотренном примере. Например, в задаче **3.43** требуется найти все значения a, при которых решением неравенства $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 > 0$ является любое число. График трехчлена в левой части неравенства — это парабола, ветви которой направлены вверх. Переформулировав поставленный вопрос, получаем, что нужно найти все значения a, при которых парабола расположена выше оси x. Теперь понятно, что нужно решить неравенство $D < 0$. Точно так же, опираясь на наглядные представления, можно рассуждать иначе: вершина параболы должна находиться в верхней полуплоскости, т. е. задача сводится к решению неравенства $y_0 > 0$, где y_0 — ордината вершины параболы.

Вообще, многие задания допускают разные способы решения. Даже текстовые задачи, для которых основным способом решения является алгебраический, в ряде случаев могут быть решены арифметически.

■ Пример 5 (№ **8.26**). Автобус отправился из пункта A в пункт B. Одновременно навстречу ему из B в A выехал велосипедист. Через 40 мин они встретились, и каждый продолжил движение в своем направлении. Автобус прибыл в пункт B через 10 мин после встречи. Через какое время после встречи прибыл в A велосипедист?

Будем рассуждать так. На путь после встречи автобус затратил в 4 раза меньше времени, чем на путь до встречи. Если точку встречи обозначить буквой C, то из сказанного следует, что AC в 4 раза больше, чем BC. Тогда, велосипедист после встречи проехал расстояние, в 4 раза большее, чем до встречи, а значит, он затратил на него $40 \cdot 4 = 160$ (мин).

Ответ: через 2 ч 40 мин. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вероятность и статистика. Примеры заданий

Задания, включенные в представленный ниже список, предлагаемые для включения в экзаменационную работу, направлены на проверку следующих умений:

— решать комбинаторные задачи, используя перебор всех возможных вариантов или правило умножения, а в заданиях второй части — еще и некоторые специальные приемы;
— определять такие статистические характеристики, как среднее арифметическое, медиана, мода, выполняя при этом необходимые подсчеты;
— находить относительную частоту и вероятность случайного события, используя готовые статистические данные; отвечать на простейшие вопросы статистического характера;
— вычислять вероятность события в классической модели (в заданиях первой части — в простейших ситуациях, в заданиях второй части — с использованием комбинаторики для определения числа исходов);
— вычислять геометрическую вероятность.

Задания для части 1

Комбинаторика

1. 1) Выписаны в порядке возрастания все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 0, 2, 4, 6. Какое число следует за числом 426?
2) Выписаны в порядке возрастания все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 1, 3, 5, 7. Какое число следует за числом 537?

2. 1) В коробке лежат четыре шара: белый, красный, синий, зеленый. Из нее вынимают два шара. Сколько существует способов сделать это?
2) В коробке лежат четыре шара: два белых, красный, зеленый. Из нее вынимают два шара. Сколько существует различных вариантов вынуть два шара разного цвета?

3. 1) Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?
2) Из класса, в котором учится 10 девочек и 13 мальчиков, нужно выбрать для дежурства по классу одну девочку и одного мальчика. Сколькими способами это можно сделать?

4. 1) В чемпионате города по футболу играет десять команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

2) В чемпионате города по хоккею играет семь команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

5. 1) В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: два урока математики, урок чтения и урок физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

2) В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: урок математики, урок чтения и два урока физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

6. 1) В конференции участвовало 30 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилось карточек?

2) Семеро друзей разъехались на новогодние каникулы. Перед Новым годом каждый из них послал всем остальным SMS-сообщения. Сколько всего сообщений было отправлено?

7. 1) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?

2) Сколько трехзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 3, 6, 9?

8. 1) В меню школьной столовой 2 разных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трех блюд?

2) В гардеробе выпускника 5 разных рубашек, 4 галстука и 2 костюма. Сколько способов одеться на выпускной вечер у него имеется?

Вероятность

9. 1) Доля брака при производстве процессоров составляет 0,05%. С какой вероятностью процессор только что купленного компьютера окажется исправным?

А. 0,05 **Б.** 0,95 **В.** 0,0095 **Г.** 0,9995

2) Доля брака при производстве блоков питания составляет 0,25%. С какой вероятностью блок питания только что купленного компьютера окажется исправным?

А. 0,25 **Б.** 0,75 **В.** 0,9975 **Г.** 0,0025

10. 1) Из слова ЭКЗАМЕН случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

2) Из слова ЭКЗАМЕН случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется согласной?

11. 1) Из класса, в котором учатся 15 мальчиков и 10 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Какова вероятность того, что это будет девочка?

2) Из класса, в котором учатся 8 мальчиков и 12 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Какова вероятность того, что это будет мальчик?

12. 1) Одновременно бросают 2 монеты. С какой вероятностью на них выпадут два орла?

2) Одновременно бросают 2 монеты. С какой вероятностью на них выпадут две решки?

13. 1) Из коробки, в которой a белых и b черных шаров, наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

А. $\frac{a}{b}$ Б. $\frac{a}{a+b}$ В. $\frac{b}{a}$ Г. $\frac{b}{a+b}$

2) Из коробки, в которой a белых и b черных шаров, наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он будет черным?

А. $\frac{a}{b}$ Б. $\frac{a}{a+b}$ В. $\frac{b}{a}$ Г. $\frac{b}{a+b}$

14. 1) В ящике 2 красных и 2 синих шара. Из него, не глядя, вынимают два шара. Какова вероятность того, что они будут одного цвета?

А. $\frac{2}{3}$ Б. $\frac{1}{2}$ В. $\frac{1}{3}$ Г. $\frac{1}{4}$

2) В ящике 2 красных и 2 синих шара. Из него, не глядя, вынимают два шара. Какова вероятность того, что они будут разного цвета?

А. $\frac{2}{3}$ Б. $\frac{1}{2}$ В. $\frac{1}{3}$ Г. $\frac{1}{4}$

Статистика

15. 1) Из трех кандидатов в сборную России по стрельбе из арбалета нужно отобрать двоих. Решено сделать этот отбор по относительной частоте попадания в мишень, которую они показали на тренировочных сборах. Результаты представлены в таблице.

Фамилия стрелка	Число выстрелов	Число попаданий
Лучкин	120	100
Арбалетов	200	120
Пулькин	150	110

Кто из спортсменов будет включен в сборную?

А. Лучкин и Арбалетов

Б. Арбалетов и Пулькин

В. Лучкин и Пулькин

Г. Все одинаково достойны

2) Из трех вратарей в сборную России по хоккею нужно отобрать двоих. Решено сделать этот отбор по относительной частоте отраженных бросков, которую они показали в чемпионате. Результаты представлены в таблице.

Фамилия вратаря	Число бросков	Число отраженных бросков
Третьяков	120	100
Четверухин	140	110
Пятаков	160	140

Кто из вратарей будет включен в сборную?

А. Третьяков и Четверухин

Б. Четверухин и Пятаков

В. Третьяков и Пятаков

Г. Все одинаково достойны

16. 1) Вася измерял в течение недели время, которое он тратит на дорогу в школу и из школы, а результаты записывал в таблицу.

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
Время до школы (мин)	19	20	21	17	22	24
Время из школы (мин)	28	22	20	25	24	22

На сколько минут (в среднем) дорога из школы занимает у него больше времени, чем дорога в школу?

2) Ваня измерял в течение недели время, которое он тратит на приготовление домашнего задания и просмотр телепередач, а результаты записывал в таблицу.

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Время на домашнее задание (мин)	120	80	100	90	110
Время на просмотр телепередач (мин)	80	100	120	100	140

На сколько минут (в среднем) просмотр телепередач занимал у него больше времени, чем приготовление домашнего задания?

17. 1) Поезда прибывали на станцию метро со следующими интервалами:

2 мин 11 с; 2 мин 8 с; 2 мин 10 с;
2 мин 12 с; 2 мин 19 с.

Найдите среднее значение и медиану данного ряда интервалов движения.

2) Телефонные звонки поступали в диспетчерскую службу вокзала со следующими интервалами:

1 мин 10 с; 1 мин 30 с; 1 мин 20 с;
1 мин 10 с; 1 мин 15 с.

Найдите среднее значение и медиану данного ряда интервалов между звонками.

18. 1) В течение четверти Таня получила следующие отметки по физике: одну «двойку», шесть «троек», три «четверки» и пять «пятерок». Найдите среднее арифметическое и моду ее оценок.

2) В течение четверти Юра получил следующие отметки по математике: две «двойки», пять «троек», четыре «четверки» и девять «пятерок». Найдите среднее арифметическое и моду его оценок.

19. 1) Президент компании получает зарплату 100000 р. в месяц, четверо его заместителей — по 20000 р., а 20 служащих компании — по 10000 р. Найдите среднее арифметическое и медиану зарплат всех сотрудников компании.

2) Президент компании получает зарплату 150000 р. в месяц, четверо его заместителей — по 25000 р., а 20 служащих компании — по 5000 р. Найдите среднее арифметическое и медиану зарплат всех сотрудников компании.

20. 1) Какое из утверждений неверно?

А. Если ряд состоит из одинаковых чисел, то его размах равен 0

Б. Если ряд состоит из одинаковых чисел, то его среднее арифметическое и медиана равны

В. Если размах ряда равен 0, то он состоит из одинаковых чисел

Г. Если среднее арифметическое и медиана ряда равны, то он состоит из одинаковых чисел

2) Какое из утверждений верно?

А. Если среднее арифметическое ряда больше 0, то он состоит из положительных чисел

Б. Если медиана ряда меньше 0, то он состоит из отрицательных чисел

В. Если размах ряда равен 0, то все числа ряда равны 0
Г. Если все числа ряда больше 0, то его среднее арифметическое и медиана положительны

21. 1) Рост Маши равен 132 см, а медиана ростов всех девочек из ее класса равна 130 см. Какое из утверждений верно?

А. В классе обязательно есть девочка выше Маши
Б. В классе обязательно есть девочка ростом 130 см
В. В классе обязательно есть девочка ростом менее 130 см
Г. В классе обязательно есть девочка ниже Маши

2) Рост Маши равен 132 см, а средний рост всех девочек из ее класса равен 130 см. Какое из утверждений верно?

А. В классе все девочки, кроме Маши, имеют рост 130 см
Б. В классе обязательно есть девочка ростом 130 см
В. В классе обязательно есть девочка ростом менее 130 см
Г. В классе обязательно есть девочка ростом 128 см

Задания для части 2

Комбинаторика

1.(2) 1) На деловую встречу пришло 5 человек. Каждый с каждым обменялся рукопожатием. Сколько всего рукопожатий было совершено?
2) На встречу выпускников пришло 10 человек. Каждый с каждым обменялся рукопожатием. Сколько всего рукопожатий было совершено?

2.(4) 1) В расписании уроков на среду для 7 класса должно быть пять уроков: алгебра, русский язык, литература, география и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день, если уроки русского языка и литературы должны стоять рядом, а урок физкультуры — последним?
2) В расписании уроков на четверг для 8 класса должно быть пять уроков: алгебра, геометрия, физика, биология и география. Сколькими способами можно составить расписание на этот день, если уроки алгебры и геометрии должны стоять рядом, а урок биологии — первым?

3.(4) 1) Из нечетных цифр составляют все возможные числа, содержащие не более четырех цифр. Сколько существует таких чисел?
2) Из четных цифр составляют все возможные числа, содержащие не более четырех цифр. Сколько существует таких чисел?

4.(6) 1) После хоккейного матча каждый игрок одной команды обменялся рукопожатием с каждым игроком другой команды. Сколько всего игроков присутствовало на площадке, если было совершено 323 рукопожатия?

2) После финальной игры в КВН каждый игрок одной команды обменялся рукопожатием с каждым игроком другой команды. Сколько всего игроков присутствовало на сцене, если было совершено 221 рукопожатие?

Вероятность

5.(2) 1) Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков?

2) Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков?

6.(2) 1) Карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 перемешивают и выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится четное число?

2) Карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 перемешивают и выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится четное число?

7.(2) 1) Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что оба числа окажутся меньше 5?

2) Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что оба числа окажутся больше 2?

8.(2) 1) Буквы слова КУБИК перемешивают и случайным образом выкладывают в ряд. С какой вероятностью снова получится это же слово?

2) Буквы слова ХОРОШО перемешивают и случайным образом выкладывают в ряд. С какой вероятностью снова получится это же слово?

9.(2) 1) Игральный кубик бросили два раза. Какое из следующих событий более вероятно:

A = «оба раза выпала пятерка»;

B = «в первый раз выпала единица, а во второй — пятерка»;

C = «сумма выпавших очков равна 2»?

А. Событие A

Б. Событие B

В. Событие C

Г. Все события равновероятны

2) Игральный кубик бросили два раза. Какое из следующих событий более вероятно:

A = «оба раза выпала единица»;

B = «в первый раз выпала единица, во второй — шестерка»;

C = «сумма выпавших очков равна 12»?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вероятность и статистика. Примеры заданий

Задания, включенные в представленный ниже список, предлагаемые для включения в экзаменационную работу, направлены на проверку следующих умений:

— решать комбинаторные задачи, используя перебор всех возможных вариантов или правило умножения, а в заданиях второй части — еще и некоторые специальные приемы;
— определять такие статистические характеристики, как среднее арифметическое, медиана, мода, выполняя при этом необходимые подсчеты;
— находить относительную частоту и вероятность случайного события, используя готовые статистические данные; отвечать на простейшие вопросы статистического характера;
— вычислять вероятность события в классической модели (в заданиях первой части — в простейших ситуациях, в заданиях второй части — с использованием комбинаторики для определения числа исходов);
— вычислять геометрическую вероятность.

Задания для части 1

Комбинаторика

1. 1) Выписаны в порядке возрастания все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 0, 2, 4, 6. Какое число следует за числом 426?
2) Выписаны в порядке возрастания все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 1, 3, 5, 7. Какое число следует за числом 537?

2. 1) В коробке лежат четыре шара: белый, красный, синий, зеленый. Из нее вынимают два шара. Сколько существует способов сделать это?
2) В коробке лежат четыре шара: два белых, красный, зеленый. Из нее вынимают два шара. Сколько существует различных вариантов вынуть два шара разного цвета?

3. 1) Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?
2) Из класса, в котором учится 10 девочек и 13 мальчиков, нужно выбрать для дежурства по классу одну девочку и одного мальчика. Сколькими способами это можно сделать?

цифр и двух букв. При этом используются только буквы АВЕКМНОРСТУХ. С какой вероятностью все цифры в номере автомобиля будут одинаковыми?

16.(6) 1) В квадрат со стороной, равной 1, бросают случайную точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не превосходит 0,25?

2) В квадрат со стороной, равной 1, бросают случайную точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата больше 0,25?

Статистика

17.(2) 1) В городе пять школ. В таблице приведен средний балл, полученный выпускниками каждой из этих школ за экзамен по математике:

Номер школы	1	2	3	4	5
Количество выпускников	60	70	30	50	70
Средний балл	60	54	68	72	54

Найдите средний балл выпускного экзамена по математике по всему городу.

2) В городе пять школ. В таблице приведен средний балл, полученный выпускниками каждой из этих школ за экзамен по математике:

Номер школы	1	2	3	4	5
Количество выпускников	30	60	40	60	60
Средний балл	66	55	60	64	58

Найдите средний балл выпускного экзамена по математике по всему городу.

18.(4) 1) При каких значениях x медиана ряда чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ x$$

будет равна 3?

2) При каких значениях x медиана ряда чисел

$$11,\ 12,\ 13,\ 14,\ x$$

будет равна 13?

19.(4) 1) При каких значениях x среднее арифметическое ряда чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ x$$

будет равно 3?

2) При каких значениях x среднее арифметическое ряда чисел

$$11,\ 12,\ 13,\ 14,\ x$$

будет равно 13?

Ответы и решения к приложению 2

Часть 1

Комбинаторика

1. 1) Самый младший разряд числа 426 (т. е. разряд единиц) увеличить нельзя — там стоит цифра 6. Разряд десятков увеличить можно — нужно цифру 2 заменить на следующую за ней цифру 4. После этого в разряд единиц нужно поставить минимальную цифру — 0. Ответ. 440.

2) Ответ. 551.

2. 1) Выпишем все возможные пары шаров: бк, бс, бз, кс, кз, сз. Ответ. 6.

2) Выпишем все возможные пары шаров: бб, бк, бз, кз. Из четырех возможных вариантов условию задачи удовлетворяют 3. Ответ. 3.

3. 1) Применим правило умножения: девочку можно выбрать 15 способами, мальчика — 10 способами, пару мальчик—девочка — $15 \cdot 10 = 150$ способами. Ответ. 150.

2) Ответ. 130.

4. 1) На первое место можно поставить любую из 10 команд, на второе — любую из 9 оставшихся, на третье — любую из 8 оставшихся. По правилу умножения общее число способов, которыми можно распределить три места, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Ответ. 720.

2) Ответ. 210.

5. 1) Урок чтения можно поставить на любой из четырех уроков, урок физкультуры — на любой из трех оставшихся. После этого для двух уроков математики останется единственный вариант поставить их в расписание. По правилу умножения общее число способов составить расписание на среду равно $4 \cdot 3 = 12$. Ответ. 12.

2) Ответ. 12.

6. 1) Каждый из 30 участников конференции раздал 29 карточек. Значит, всего было роздано $30 \cdot 29 = 870$ карточек. Ответ. 870.

2) Ответ. 42.

7. 1) На первое место можно поставить любую из цифр, кроме нуля, — это 3 варианта; на второе место — любую из 4 цифр и на третье — тоже любую из 4 цифр. По правилу умножения общее количество вариантов равно $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$. Ответ. 48.

2) Ответ. 48.

8. 1) Первое блюдо можно выбрать 2 способами, второе блюдо — 4 способами и третье блюдо — 3 способами. По правилу умножения общее количество вариантов равно $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Ответ. 24.

2) Ответ. 40.

Вероятность

9. 1) Исправные процессоры составляют 99,95% от общего числа, поэтому искомая вероятность равна 0,9995. Ответ. Г.

2) Ответ. В.

10. 1) Опыт имеет 7 равновозможных исходов (букв), из которых 3 благоприятных (гласные буквы). Поэтому вероятность равна $\frac{3}{7}$. Ответ. $\frac{3}{7}$.

2) Ответ. $\frac{4}{7}$.

11. 1) Опыт имеет 25 равновозможных исходов (учеников), из которых 10 благоприятных (девочек). Поэтому вероятность равна $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$. Ответ. $\frac{2}{5}$.

2) Ответ. $\frac{2}{5}$.

12. 1) Опыт имеет 4 равновозможных исхода ОО, ОР, РО, РР, из которых благоприятным будет только один ОО. Поэтому вероятность равна $\frac{1}{4}$. Ответ. $\frac{1}{4}$.

2) Ответ. $\frac{1}{4}$.

13. 1) Опыт имеет $a + b$ равновозможных исходов (шаров), из которых a благоприятных (белых). Поэтому вероятность равна $\frac{a}{a+b}$. Ответ. Б.

2) Ответ. Г.

14. 1) Решение 1. Пронумеруем мысленно все шары: 1, 2, 3, 4. Будем считать, что шары с номерами 1 и 2 красные, а с номерами 3 и 4 синие. Составим таблицу:

1	2	3	4
К	К	С	С

Опыт имеет 6 равновозможных исходов: 12, 13, 14, 23, 24, 34 (шары вынимают одновременно, поэтому порядок шаров в каждой паре не учитываем). Из этих шести исходов благоприятными будут два исхода: 12, 34. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Решение 2. Будем считать, что шары вынимают не одновременно, а последовательно без возвращения (понятно, что ответ от этого не зависит). После того как вытащили первый шар независимо от его цвета, в урне осталось три шара, из которых только один имеет тот же самый цвет. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$. Ответ. В.

2) Ответ. А.

Статистика

15. 1) Найдем относительную частоту попаданий для каждого стрелка и сравним их.

Лучкин: $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$; Арбалетов: $\frac{120}{200} = \frac{3}{5}$; Пулькин: $\frac{110}{150} = \frac{11}{15}$.

$\frac{3}{5} < \frac{11}{15} < \frac{5}{6}$. Ответ. В.

2) Ответ. В.

16. 1) Решение 1. Найдем среднее время, затраченное на дорогу в школу, на дорогу из школы, а затем их разность:

$$\frac{19+20+21+17+22+24}{6} = 20{,}5; \quad \frac{28+22+20+25+24+22}{6} = 23{,}5;$$

$23{,}5 - 20{,}5 = 3$. Решение 2. Найдем для каждого из шести дней недели разность между временем, затраченным на дорогу из школы и на дорогу в школу, а затем среднее значение этих разностей: $\frac{9+2-1+8+2-2}{6} = 3$. Ответ. На 3 мин.

2) Ответ. На 8 мин.

17. 1) Для вычисления среднего значения нужно перевести временны́е интервалы в однородные единицы измерения (секунды). Но поскольку для всех членов ряда число минут одинаково, то можно упростить вычисления, найдя среднее только по «секундной части»: $\frac{11+8+10+12+19}{5} = 12$. Среднее арифметическое для данного ряда равно 2 мин 12 с. Для вычисления медианы ряд нужно упорядочить:

2 мин 8 с < 2 мин 10 с < 2 мин 11 с < 2 мин 12 с < 2 мин 19 с. Медиана равна 2 мин 11 с. Ответ. 2 мин 12 с; 2 мин 11 с.

2) Ответ. 1 мин 17 с; 1 мин 15 с.

18. 1) Среднее арифметическое равно $\frac{2\cdot1+3\cdot6+4\cdot3+5\cdot5}{1+6+3+5} = 3{,}8$.

Максимальную частоту имеет оценка «3», которая и будет модой. Ответ. 3,8; 3.

2) Ответ. 4; 5.

19. 1) Чтобы не писать лишние нули будем считать все зарплаты не в рублях, а в тысячах рублей. Среднее арифметическое равно $\frac{100\cdot1+20\cdot4+10\cdot20}{1+4+20} = 15{,}2$. Если выписать весь ряд зарплат по возрастанию, получим 10, 10, ..., 20, 20, 20, 20, 100. Очевидно, что в середине ряда будут числа 10, поэтому медиана равна 10. Ответ. 15 200 р., 10 000 р.

2) Ответ. 14 000 р., 5000 р.

20. 1) Например, для ряда 1, 2, 3 среднее арифметическое и медиана равны. Ответ. Г.

2) Сумма положительных чисел положительна, поэтому и их среднее арифметическое положительно. Если упорядочить

ряд положительных чисел, то число (или два числа), стоящее посередине этого ряда, разумеется, будет положительно. Ответ. Г.

21. 1) Верным является утверждение В. Если бы в классе не было девочек с ростом менее 130 см, то средний рост был бы больше 130 см (так как среднее арифметическое чисел, одно из которых равно 132, а остальные больше или равны 130, будет строго больше 130). Утверждения А и Б неверные. Пример: 128; 132. Среднее равно 130. Утверждение Г неверно. Пример: 129; 129; 132. Среднее равно 130. Ответ. В.

2) Верным является утверждение Г. Если бы в классе не было девочек ниже Маши, то медиана их роста была бы больше или равна 132 см. Утверждения А и Б неверные. Пример: 128; 132. Медиана равна 130. Утверждение В неверно. Пример: 130; 130; 132. Медиана равна 130. Ответ. Г.

Часть 2

Комбинаторика

1. 1) Каждое рукопожатие — это пара (неупорядоченная), которую можно составить из 5 человек. На первое место в паре можно поставить любого из 5 человек, на второе — любого из 4 оставшихся. Всего таких пар по правилу умножения будет $5 \cdot 4 = 20$. Но при этом будет учитываться порядок людей в паре (например, Иванов—Петров и Петров—Иванов будут считаться *разными* парами). Поскольку в рукопожатиях порядок людей учитывать не надо, то полученный результат нужно поделить на 2: получим $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Ответ. 10.

2) Ответ. 45.

2. 1) Урок физкультуры сразу поставим на последнее место и уже не будем учитывать:

				Ф

Два соседних места для уроков русского языка и литературы можно выбрать тремя способами. Поставить их на эти выбранные места можно двумя способами. После этого урок алгебры можно поставить на любое из двух оставшихся мест, а урок географии — на единственное оставшееся. По правилу умножения получаем $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$. Ответ. 12.

2) Ответ. 12.

3. 1) Нечетных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9. Очевидно, однозначных чисел можно составить 5. Количество двузначных, трехзначных и четырехзначных чисел можно найти по правилу умножения: двузначных — $5 \cdot 5 = 25$; трехзначных — $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; четырехзначных — $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Всего можно составить $5 + 25 + 125 + 625 = 780$ (чисел). Ответ. 780.

2) Четных цифр пять: 0, 2, 4, 6, 8. Очевидно, однозначных чисел можно составить 5. Количество двузначных, трехзначных и четырехзначных чисел можно найти по правилу умножения: двузначных — $4 \cdot 5 = 20$; трехзначных — $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$; четырехзначных — $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$; (на первое место можно ставить любую из цифр, кроме 0, значит, всего 4 варианта). Всего можно составить $5 + 20 + 100 + 500 = 625$ (чисел). Ответ. 625.

4. 1) Пусть в первой команде было m игроков, а во второй — n игроков. Тогда всего было совершено по правилу умножения $m \cdot n$ рукопожатий. Получаем уравнение с двумя неизвестными, которое нужно решить в целых числах: $m \cdot n = 323$. Поскольку m и n не могут равняться 1 (в хоккейной команде не может быть один игрок), то уравнение имеет всего два решения (других способов разложить 323 на два множителя нет): $m = 17$, $n = 19$ или $m = 19$, $n = 17$. В любом случае их сумма равна 36. Ответ. 36.

2) Ответ. 30.

Вероятность

5. 1) При подбрасывании двух игральных кубиков имеем 36 равновозможных исходов. Из них благоприятными будут 4 исхода: $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $4 + 1$. Отсюда вероятность равна $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Ответ. $\frac{1}{9}$.

2) Ответ. $\frac{5}{36}$.

6. 1) Решение 1. Исходами опыта являются перестановки из пяти чисел, которых 5!. Чтобы получить благоприятный исход (т. е. перестановку с четной цифрой на конце), нужно поставить на последнее место любую из двух четных цифр (2 варианта), на предпоследнее — любую из четырех оставшихся (4 варианта), перед ней — любую из трех оставшихся (3 варианта) и т. д. Всего по правилу умножения $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4!$ благоприятных исходов. Отсюда вероятность равна $\frac{2 \cdot 4!}{5!}=\frac{2}{5}$. Решение 2. Поскольку четность числа зависит только от последней цифры, то будем выкладывать наше число именно с нее. Вероятность вытащить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 четную цифру равна $\frac{2}{5}$. Это и будет искомой вероятностью, так как от остальных четырех цифр четность числа уже не зависит. Ответ. $\frac{2}{5}$.

2) Ответ. $\frac{3}{7}$.

7. 1) При подбрасывании двух игральных кубиков имеем 36 равновозможных исходов. Чтобы получился благоприятный

исход, на первом кубике должно выпасть любое число от 1 до 4 (это 4 варианта) и на втором кубике — любое число от 1 до 4 (4 варианта). Всего по правилу умножения $4 \cdot 4 = 16$ благоприятных исходов. Отсюда вероятность равна $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. Ответ. $\frac{4}{9}$.

2) Ответ. $\frac{4}{9}$.

8. 1) Опыт имеет 5! равновозможных исходов — это перестановки из пяти букв. Если бы все буквы были различными, то благоприятный исход был бы только один. Но поскольку в слове две буквы К, то при двух разных перестановках получится одно и то же слово КУБИК. Таким образом, благоприятных исходов будет два, поэтому вероятность равна $\frac{2}{5!} = \frac{1}{60}$. Ответ. $\frac{1}{60}$.

2) Указание. Так как в слове три буквы О, то благоприятных исходов будет 3!. Ответ. $\frac{1}{120}$.

9. 1) Опыт имеет $6 \cdot 6 = 36$ равновозможных исходов. Для события A — один благоприятный исход; для события B — один благоприятный исход; для события C — один благоприятный исход (на обоих кубиках выпали 1). Отсюда все события имеют одинаковую вероятность $\frac{1}{36}$. Ответ. Г.

2) Опыт имеет $6 \cdot 6 = 36$ равновозможных исходов. Для события A — один благоприятный исход; для события B — один благоприятный исход; для события C — два благоприятных исхода (1 и 2, 2 и 1). Отсюда событие C наиболее вероятное. Ответ. В.

10. 1) Длина всего отрезка равна 4. Длина той его части, где координата больше 1, равна 1. Отсюда вероятность равна $\frac{1}{4}$. Ответ. $\frac{1}{4}$.

2) Ответ. $\frac{2}{3}$.

11. 1) Решение 1. Исходами опыта являются (неупорядоченные) пары, которые можно составить из 25 человек. Всего таких пар $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Благоприятными исходами будут пары, в которые входит Наташа. Наташу можно поставить в пару с любым из 24 ее одноклассников, значит, таких пар 24. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{24}{300} = \frac{2}{25}$. Решение 2. Представим себе, что двоих дежурных выбирают так: в мешок кладут 25 бумажек, на двух из которых нарисованы крестики. Ученики по очереди тащат бумажки из мешка. Кому досталась бумажка с крестиком — тот и дежурит. Для простоты будем считать, что Наташа тащит бумажку первой (ответ от этого не зависит). Очевидно, что вероятность вытащить бумажку с крестиком равна в этом случае $\frac{2}{25}$. О т в е т. $\frac{2}{25}$.

2) О т в е т. $\frac{1}{10}$.

12. 1) Р е ш е н и е 1. Опыт представляет собой выбор двух вагонов из восьми с повторением: первый пассажир может выбрать любой из 8 вагонов, второй пассажир тоже может выбрать любой из 8 вагонов. Общее количество исходов равно $8 \cdot 8$. Чтобы исход был благоприятным, первый человек может сесть в любой из 8 вагонов, а второй — в любой из 7 оставшихся, поэтому количество благоприятных исходов равно $8 \cdot 7$. Отсюда искомая вероятность будет $\frac{8 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{7}{8}$. Р е ш е н и е 2. Пусть первый человек уже сел в какой-нибудь вагон. Если второй человек выбирает вагон наугад, то у него остается 7 шансов из 8 выбрать его так, чтобы не попасть в тот же вагон. Поэтому вероятность равна $\frac{7}{8}$. О т в е т. $\frac{7}{8}$.

2) О т в е т. $\frac{1}{8}$.

13. 1) Р е ш е н и е 1. Пронумеруем мысленно всех детей: 1, 2, 3, 4. Будем считать, что номера 1 и 2 получили мальчики, а номера 3 и 4 — девочки:

1	2	3	4
М	М	Д	Д

Исходами опыта являются (неупорядоченные) пары, которые можно составить их четырех чисел. Выпишем все эти исходы: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Из этих шести исходов благоприятными будут четыре исхода: 13, 14, 23, 24. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Р е ш е н и е 2. Будем считать, что два билета разыгрывают так: в мешок кладут 4 бумажки с именами детей, а затем одну за другой вынимают две бумажки — их владельцы и идут в кино. После того как вытащили первую бумажку независимо от того, кому она принадлежит, в мешке осталось три бумажки, из которых две принадлежат детям одного пола. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$. О т в е т. $\frac{2}{3}$.

2) Исходами опыта являются (неупорядоченные) пары, которые можно составить из четырех человек. Всего таких пар $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Благоприятным будет только одна из этих шести пар,

которая состоит из двух девочек. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$. Ответ. $\frac{1}{6}$.

14. 1) Обозначим неизвестное количество черных шаров в урне через x. Исходами опыта будут всевозможные пары, которые можно составить из 10 шаров. Количество таких пар равно $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ (на 2 делим, потому что порядок шаров в паре не учитывается). Благоприятными будут всевозможные пары, которые можно составить из x черных шаров. Количество таких пар равно $\frac{x(x-1)}{2}$. Значит, вероятность вынуть два черных шара из такой урны равна $\frac{x(x-1)}{2\cdot 45}$. Получаем уравнение, которое нужно решить в натуральных числах: $\frac{x(x-1)}{90}=\frac{1}{15}$, $x(x-1)=6$, $x=3$. В урне 3 черных шара, значит, белых шаров 7. Ответ. 7.

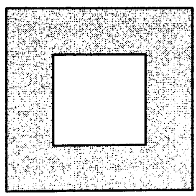
2) Ответ. 3.

15. 1) Найдем общее количество номеров, которое можно составить по описанным правилам. Всего в номере 6 мест: а) любая из 12 букв; б) любая из 10 цифр; в) любая из 10 цифр; г) любая из 10 цифр; д) любая из 12 букв; е) любая из 12 букв. Всего по правилу умножения $12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12$ номеров.

2) Найдем количество номеров, в которых все буквы и цифры разные: а) любая из 12 букв; б) любая из 10 цифр; в) любая из 9 оставшихся цифр; г) любая из 8 оставшихся цифр; д) любая из 11 оставшихся букв; е) любая из 10 оставшихся букв. Всего по правилу умножения $12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10$ номеров. Искомая вероятность равна $\frac{12\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 11\cdot 10}{12\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12}=\frac{11}{20}$. Ответ. $\frac{11}{20}$.

2) Ответ. $\frac{1}{100}$.

16. 1) Площадь всего квадрата равна 1. Множество точек, расстояние от которых до ближайшей его стороны не превосходит 0,25 — это закрашенная на рисунке часть квадрата (внутри данного квадрата расположен квадрат со стороной, равной 0,5). Площадь этой части равна $1 - 0{,}5^2 = 0{,}75$. Отсюда вероятность равна 0,75.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

2) Ответ. $\frac{1}{4}$.

Статистика

17. 1) Чтобы найти средний балл по всему городу, нужно сложить баллы всех выпускников города и поделить на общее количество выпускников. Общее количество выпускников равно $60 + 70 + 30 + 50 + 70 = 280$. Если умножить количество учеников в школе на средний балл по школе, то получится сумма баллов в этой школе, а если сложить все такие произведения, то сумма всех баллов по городу равна

$$60 \cdot 60 + 70 \cdot 54 + 30 \cdot 68 + 50 \cdot 72 + 70 \cdot 54 = 16\,800.$$

Средний балл по городу равен $\frac{16800}{280} = 60$. Ответ. 60.

2) Ответ. 60.

18. 1) После ранжирования (упорядочения) данного ряда чисел в зависимости от значений x будет получен один из следующих рядов:

x, 1, 2, 3, 4, если $x < 1$;
1, x, 2, 3, 4, если $1 \leqslant x < 2$;
1, 2, x, 3, 4, если $2 \leqslant x < 3$;
1, 2, 3, x, 4, если $3 \leqslant x < 4$;
1, 2, 3, 4, x, если $x > 4$.

Найдем для каждого из этих пяти рядов его медиану: 2, 2, x, 3, 3. Получаем, что медиана равна 3 при $x \geqslant 3$. Ответ. $x \geqslant 3$.

2) Ответ. $x \geqslant 13$.

19. 1) Запишем среднее арифметическое заданного ряда:

$$\frac{1+2+3+4+x}{5} = \frac{10+x}{5}.$$

Решим уравнение $\frac{10+x}{5} = 3$, $x = 5$. Ответ. $x = 5$.

2) Ответ. $x = 15$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Серия «Государственная итоговая аттестация»

Кузнецова Людмила Викторовна
Суворова Светлана Борисовна
Бунимович Евгений Абрамович
Колесникова Татьяна Владимировна
Рослова Лариса Олеговна

Алгебра

Сборник заданий для подготовки
к государственной итоговой аттестации
в 9 классе

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова*, *Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *О. А. Карповой*
Корректоры *О. Н. Леонова*, *И. Н. Панкова*, *И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 27.07.2009. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 10,58. Тираж 100 000 экз. Заказ № 23425 (К-Л).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 978-5-09-022180-1

9 785090 221801

АЛГЕБРА

- Сборник позволяет ознакомиться с новой формой итоговой аттестации по алгебре в 9 классе и подготовиться к экзамену
- Книга содержит:
  — варианты тренировочных тестов, представляющих собой первую часть экзаменационной работы и направленных на проверку базовой подготовки выпускников
  — набор заданий, из которых составляется вторая часть экзаменационной работы, направленная на дифференцированную проверку знаний учащихся на повышенном уровне
  — демонстрационные версии экзаменационных работ и критерии оценивания
- Ко всем заданиям даны ответы, а к наиболее трудным — указания

ГИА